

高2数学 基本問題演習 演習 38. 空間ベクトル(1)

① [I. 上智大 II. 2016 慶応義塾大 III. 2001 神戸薬科大]

I. 空間において、点 $P(-2, -3, -1)$ に対する次の問いに答えよ。

- (1) z 軸に関して対称な点 Q の座標を求めよ。
- (2) xy 平面に関して対称な点 R の座標を求めよ。
- (3) 3つの点 P, Q, R を頂点とする三角形の面積を求めよ。

II. 座標空間内の点 $A(1, 1, 1)$, $B(2, -1, -1)$, $C(-1, -2, -4)$, $D(3, 2, 6)$ に対して、三角形 ABC の重心を M とし、三角形 ABD の重心を N とする。このとき、点 M の座標は ア である。また、線分 MN を $4:3$ に外分する点の座標は イ である。

III. 2点 $A(1, 2, -2)$, $B(3, 4, -2)$ と xy 平面上の点 C に対して、三角形 ABC が正三角形になるような点 C をすべて求めて座標で表示すると である。

② [(1) 関西大 (2) 京都産業大 (3) 新潟薬科大 (4) 金沢工業大 (5) 千葉工業大]

(1) 半径 r の球面 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = r^2$ が yz 平面と共有点をもち、かつ xy 平面と共有点をもたないような r の値の範囲を求めよ。

(2) 座標空間において、点 $(-2, 1, -1)$ を通り、3つの座標平面に接する2つの球面の方程式を求めよ。

(3) 座標空間内に、2点 $A(1, -3, 6)$, $B(-2, 0, 3)$ がある。このとき、線分 AB を $2:1$ の比に内分する点の座標を求めると、 ア となる。また、2点 A, B からの距離の比が

$2:1$ であるような動点を P とすると、座標が イ である定点 C と動点 P との距離は、常に一定値 ウ に等しくなる。

(4) 空間において、球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 7 = 0$ が xy 平面と交わってできる円の中心の座標と半径を求めよ。

(5) 2つの球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + a = 0$ が接するような定数 a の値は小さい方から順に ア , イ である。

高2数学 基本問題演習 演習 38. 空間ベクトル(1)

③ [2019 大阪大]

座標空間内の2つの球面 $S_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$ と

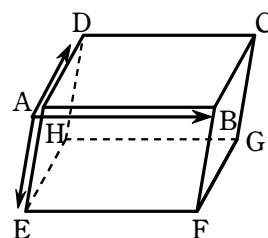
$S_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$ を考える。 S_1 と S_2 の共通部分を C とする。

- (1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が最小となる球面の方程式を求めよ。
- (2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。

④ [2017 立教大 1997 明治大]

(1) 平行六面体 $ABCD-EFGH$ において辺 BC の中点を P 、
辺 GH の中点を Q とする。線分 PQ の中点を R とする

とき、 $\overrightarrow{AR} = \text{ア} \overrightarrow{AB} + \text{イ} \overrightarrow{AD} + \text{ウ} \overrightarrow{AE}$
である。



(2) 四面体 $ABCD$ において、辺 AB, CD の中点をそれぞれ P, Q とし、 $\triangle ABC$ の重心を

G とするとき、 $\overrightarrow{PQ} = \text{ア} \overrightarrow{AB} + \text{イ} \overrightarrow{AC} + \text{ウ} \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{GQ} = \text{エ} \overrightarrow{AB} + \text{オ} \overrightarrow{AC} + \text{カ} \overrightarrow{AD}$

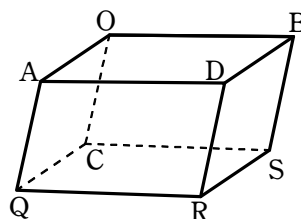
⑤ [I. 2016 岩手大 II. 2008 北里大 III. 2010 岩手大]

I. ベクトル $\vec{a} = (2, -3x, 8)$ がベクトル $\vec{b} = (3x, -6, 4y-2)$ と平行のとき、 x と y の値を求めよ。

II. 3点 $A(a, 3, 11)$, $B(-1, b, 5)$, $C(3, -5, -1)$ が一直線上にあるとき、 a, b の値と AB の長さを求めよ。

III. 2つずつ平行な3組の平面で囲まれた立体を平行六面体という。図のような平行六面体 $OADB-CQRS$ において、 $\triangle ABC$ の重心を F 、 $\triangle DQS$ の重心を G とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。
- (2) 4点 O, F, G, R は同一直線上にあることを示せ。



高2数学 基本問題演習 演習 38. 空間ベクトル(1)

6 [2015 立教大]

座標空間における4点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$, $D(x, 4, 5)$ が同一平面上にあるとき, $x = \boxed{}$ である。

7 [I. 2011 関西大 II. 2003 神戸大 III. 2015 岩手大]

I. $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 3)$, $\vec{c} = (0, 3, 1)$ とする。 $\vec{p} = (1, 2, 4)$ を $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ と表すとき, s, t, u の値を求めよ。

II. 四面体 $OABC$ において, 辺 OA の中点を P_0 , 辺 OB を $1:4$ の比に内分する点を Q_0 , 辺 OC を $1:3$ の比に内分する点を R_0 とする。

(1) 線分 CP_0 を $s:(1-s)$ の比に内分する点を P , 線分 AQ_0 を $t:(1-t)$ の比に内分する点を Q , 線分 BR_0 を $u:(1-u)$ の比に内分する点を R とする。

このとき, 三角形 PQR の重心 M の位置ベクトル $\overrightarrow{OM}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, s, t, u を用いて表せ。

(2) 三角形 ABC の重心を N とする。 M が線分 ON の中点であるとき, s, t, u の値を求めよ。

III. 四面体 $OABC$ において, 辺 OA の中点を P , 辺 BC を $2:1$ に内分する点を Q , 辺 OC を $1:3$ に内分する点を R , 辺 AB を $s:(1-s)$ に内分する点を S とする。ただし, $0 < s < 1$ とする。また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および $\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および s で表せ。

(3) 線分 PQ と線分 RS が交わるときの s の値を求めよ。

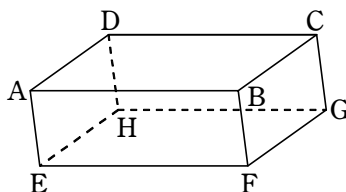
高2数学 基本問題演習 演習 38. 空間ベクトル(1)

8 [I. 武蔵工業大 II. 鹿児島大 III. 関西学院大 IV. 群馬大]

I. 四面体 $OABC$ の辺 OA , AB , BC , CO の中点をそれぞれ D , E , F , G とし, DF と EG の交点を H とする. また, 直線 OH が $\triangle ABC$ と交わる点を I とする. A , B , C の O に関する位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ.

II. 四面体 $OABC$ を考える. 辺 OA を $1:1$ に内分する点を P とする. また辺 OB を $2:1$ に内分する点を Q とし, 辺 OC を $3:1$ に内分する点を R とする. 更に三角形 ABC の重心を G とする. 3点 P , Q , R を通る平面と線分 OG の交点を K とする. 線分 OK と KG の長さの比を求めよ.

III. 右の図のような平行六面体 $ABCD-EFGH$ を考える. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく. 線分 CG の中点を M , 直線 AM と平面 BDE の交点を P とする.



(1) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと,

$$\overrightarrow{AM} = \text{ア} \boxed{}, \overrightarrow{AP} = \text{イ} \boxed{} \text{である.}$$

(2) 直線 DP と平面 ABE の交点を Q とすると, $\frac{BQ}{QE} = \text{ウ} \boxed{}$ である.

IV. 空間において, 4点 A, B, C, D と点 P が $\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} + s\overrightarrow{DP} = \vec{0}$ を満たしている. さらに, 四面体 $ABCD$ と四面体 $ABCP$ の体積比が $2:1$ であるとき, s の値を求めよ.