

高2数学 基本問題演習 演習 4. 集合と論理

1 [1998 東京女子大]

9 で割り切れる整数全体の集合を A , 15 で割り切れる整数全体の集合を B とする.

$C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ とするとき, C は 3 で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ.

2 [2007 慶応義塾大]

a を実数の定数とする. 区間 $1 \leq x \leq 4$ を定義域とする 2 つの関数

$$f(x) = ax, \quad g(x) = x^2 - 4x + 9$$

を考える. 次の条件を満たすような a の範囲をそれぞれ求めよ.

(1) 定義域に属するすべての x に対して, $f(x) \geq g(x)$ が成り立つような a の範囲は

$$a \geq \boxed{} \text{ である.}$$

(2) 定義域に属する x で, $f(x) \geq g(x)$ を満たすものがあるような a の範囲は

$$a \geq \boxed{} \text{ である.}$$

(3) 定義域に属するすべての x_1 とすべての x_2 に対して, $f(x_1) \geq g(x_2)$ が成り立つよう

$$\text{な } a \text{ の範囲は } a \geq \boxed{} \text{ である.}$$

(4) 定義域に属する x_1 と x_2 で, $f(x_1) \geq g(x_2)$ を満たすものがあるような a の範囲は

$$a \geq \boxed{} \text{ である.}$$

3 [2023 公立鳥取環境大]

次の命題の真偽をそれぞれ調べよ. 偽の場合には反例を示し, 真の場合には証明せよ.

(1) 0 ではない 2 つの実数 a, b について, $a^2 = b^2$ ならば $a = b$ である.

(2) 実数 x, y について, $x + y \leq 4$ ならば, $x \leq 2$ または $y \leq 2$ である.

(3) 自然数 n が 4 の倍数かつ 6 の倍数ならば, n は 24 の倍数である.

(4) 自然数について, すべての偶数は素数ではない.

(5) k は実数の定数とする. 実数 x について, x の 3 次関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx$ の極大

値と極小値が存在し, かつ, それらの和が 0 ならば, $k = \frac{8}{9}$ である.

高2数学 基本問題演習 演習 4. 集合と論理

4 [2004 昭和薬科大]

次の各組で、 P は Q であるためのどんな条件か、あてはまるものを A, B, C, D から選び、記号で答えよ。ただし、小文字はすべて実数とする。

A : 必要 B : 十分 C : 必要十分 D : いずれでもない

- (1) $P: x+y$ は偶数 $Q: x$ と y は偶数
(2) $P: a < 0, b^2 - 4ac < 0$ $Q: \text{すべての } x \text{ に対して } ax^2 + bx + c < 0$
(3) $P: ab \neq 0$ $Q: |a| + |b| > |a + b|$
(4) $P: x > y$ $Q: ax > ay$
(5) $P: a^2 + b^2 + c^2 = 0$ $Q: a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

5 [I. 2005 金沢工業大 II. 2008 愛知大]

I. 命題「 $x > 2$ ならば、 $x^2 > 4$ である」について、その逆、対偶を下の命題 A, B, C, D から選ぶと、逆は $\neg \square$, 対偶は $\neg \square$ である。

- A $x \leq 2$ ならば、 $x^2 \leq 4$ である。 B $x^2 \leq 4$ ならば、 $x \leq 2$ である。
 C $x^2 < 4$ ならば、 $x < 2$ である。 D $x^2 > 4$ ならば、 $x > 2$ である。

また、命題 A, B, C, D のうち、真であるものは $\neg \square$ で、他は偽である。

II. 整数 a, b, c に関する次の命題 P を考える。

「 $a^2 + b^2 + c^2$ が偶数になるならば、 a, b, c のうち少なくとも1つは偶数である」

- (1) 次の中から命題 P の逆、裏、対偶を選べ。なお、命題 $p \implies q$ に対し、 $q \implies p$ を逆、 $\overline{p} \implies \overline{q}$ を裏、 $\overline{q} \implies \overline{p}$ を対偶という。ただし、 $\overline{p}$ は p の否定を表す。
(ア) a, b, c の少なくとも1つが偶数なら、 $a^2 + b^2 + c^2$ は偶数である。
(イ) a, b, c のすべてが奇数なら、 $a^2 + b^2 + c^2$ は奇数である。
(ウ) a, b, c の少なくとも1つが奇数なら、 $a^2 + b^2 + c^2$ は奇数である。
(エ) $a^2 + b^2 + c^2$ が奇数になるならば、 a, b, c のすべてが奇数である。
(オ) $a^2 + b^2 + c^2$ が奇数になるならば、 a, b, c の少なくとも1つが奇数である。
(2) 対偶を利用して命題 P を証明せよ。

高2数学 基本問題演習 演習 4. 集合と論理

6 [2018 鳥取大]

- (1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) 有理数 a, b, c, d に対して, $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ならば, $a = c$ かつ $b = d$ であることを示せ。
- (3) $(a + \sqrt{3})(b + 2\sqrt{3}) = 9 + 5\sqrt{3}$ を満たす有理数 a, b を求めよ。

7 [2009 京都教育大]

- (1) m が自然数のとき, $\sqrt{m}$ が整数でなければ, $\sqrt{m}$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) n が2以上の整数のとき, $\sqrt{n^2 + 3}$ は無理数であることを証明せよ。

8 [2010 旭川医科大]

- (1) 整数を係数とする n 次方程式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

が有理数の解 $\frac{\beta}{\alpha}$ (α と β は互いに素な整数とする) をもつとき, α は a_0 の約数であり

β は a_n の約数であることを示せ。

- (2) 素数 p に対して,

$$x + y + z = \frac{p}{3}, \quad xy + yz + zx = \frac{1}{p}, \quad xyz = \frac{1}{p^3}$$

を満たす x, y, z がすべて正の有理数であるとき, p および x, y, z を求めよ。

9 [2000 愛媛大]

p, q を整数とし, $f(x) = x^2 + px + q$ とおく。

- (1) 有理数 a が方程式 $f(x) = 0$ の1つの解ならば, a は整数であることを示せ。
- (2) $f(1)$ も $f(2)$ も2で割り切れないとき, 方程式 $f(x) = 0$ は整数の解をもたないことを示せ。

10 [2003 鹿児島大]

a, b, c を奇数とする. x についての2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に関して

(1) この2次方程式が有理数の解 $\frac{q}{p}$ をもつならば, p と q はともに奇数であることを

背理法で証明せよ. ただし $\frac{q}{p}$ は既約分数とする.

(2) この2次方程式が有理数の解をもたないことを (1) を利用して証明せよ.

11 [神戸大]

x についての方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ において, n は2以上の整数で, 係数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ もすべて整数とする.

もし, a_0, a_n および $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ がいずれも奇数であるならば, 上の方程式は有理数の解を持ち得ないことを証明せよ.