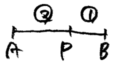
基本問題演習 25. 図形と方程式(1)

[1]

(1) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ とする

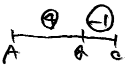
ABを2:1に内分する点Pが(1, 5)より



$$\begin{cases} \dfrac{x_1+2x_2}{3}=1 \\ \dfrac{y_1+2y_2}{3}=5 \end{cases}$$

ACを4:1に外分する点Qが(3, −3)より

4:(−1)に内分



$$\begin{cases} \dfrac{-x_1+4x_3}{3}=3 \\ \dfrac{-y_1+4y_3}{3}=-3 \end{cases}$$

△ABCの重心が(0, 2)より

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=0 \\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=2 \end{cases}$$

より

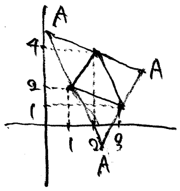
$$\begin{cases} x_1+2x_2 = 3 \\ -x_1+4x_3=9 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1+2y_2 = 15 \\ -y_1+4y_3=-9 \\ y_1+y_2+y_3=6 \end{cases}$$

$\therefore x_1=-5,\quad y_1=1$

$\therefore A(-5, 1)$

(2) 図より

$y=5, 3, -1$

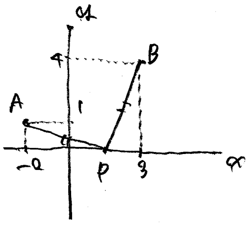


<point>

1. 内分点, 外分点, 重心の座標.

[2]

(1) $P(a, 0)$とおける



AP=BPより

$AP^2=BP^2$

$(a+2)^2+1^2=(3-a)^2+4^2$

$\cancel{a^2}+4a+5=9-6a+\cancel{a^2}+16$

$10a=20$

$\therefore a=2$

よって $P(2, 0)$

(2) A, Bから等距離にある点をPとおくと

$P(a, -a+1)$とおける

AP=BPより

$AP^2=BP^2$

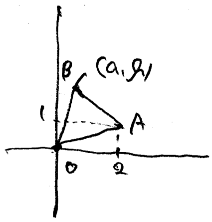
$(a-1)^2+(-a-2)^2=(a-6)^2+(-a-3)^2$

$\cancel{a^2}-2a+1+(\cancel{a^2}+4a+4)=\cancel{a^2}-12a+36+(\cancel{a^2}+6a+9)$

$4a=40 \quad \therefore a=10$

よって $P(10, -9)$

(3) $A(2, 1)$, $B(a, b)$とする



$OA=\sqrt{5}$であるから

$OB=\sqrt{5}$より

$OB^2=5$

$a^2+b^2=5$ —①

$AB=\sqrt{5}$より

$AB^2=5$

$(a-2)^2+(b-1)^2=5$

$a^2+b^2-4a-2b=0$ —②

①−②より

$4a+2b=5 \quad \therefore b=-2a+\dfrac{5}{2}$

①, ②より

$a^2+\left(-2a+\dfrac{5}{2}\right)^2=5$

$5a^2-10a+\dfrac{25}{4}=0$

$4a^2-8a+1=0$

$\therefore a=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore a=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (図より)

$b=-2+\sqrt{3}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$

<point>

1. 2点間の距離

[3]

I. 平行な直線

$y+3=3(x-2)$

$\therefore y=3x-9$

垂直な直線

$y+3=-\dfrac{1}{3}(x-2)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{3}$

II.(1) ℓの法線ベクトル $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}a\\-2\end{pmatrix}$

m 〃 $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}1\\a+3\end{pmatrix}$

ℓ⊥mのとき $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$ であるから

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ より

$a-2(a+3)=0$ ∴ $a=-6$

(2) ℓ//m or ℓ=m のとき

$\vec{n_1}//\vec{n_2}$ より

$a(a+3)+2=0$

$a^2+3a+2=0$

$(a+2)(a+1)=0$ ∴ $a=-2,-1$

$a=-2$ のとき ℓ//m

$a=-1$ 〃 ℓ=m より $a=-2$

<point>

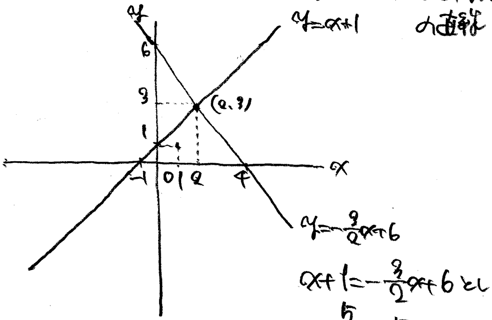
1. 直線の平行条件、直交条件

$\boxed{4}$

$x-y=-1 \Leftrightarrow y=x+1$

$3x+2y=12 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+6$

$kx-y=k-1 \Leftrightarrow y=k(x-1)+1$：(1, 1)を通り傾きk の直線



$x+1=-\frac{3}{2}x+6$ として

$\frac{5}{2}x=5$ ∴ $x=2$

(2, 3)

3直線が三角形を作らないとき

$k=\underbrace{-\frac{3}{2},\ 1}_{\text{いずれかの2直線が平行}},\ 2$

↑ 3直線が1点で交わる

$\boxed{5}$

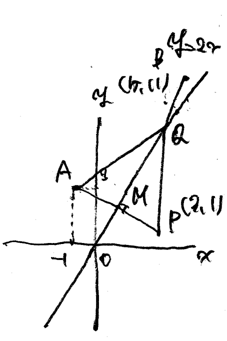
(1) P(a, b) とする

APの中点M$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ は

$y=2x$ 上にあるから

$\frac{b+3}{2}=2\cdot\frac{a-1}{2}$

∴ $b=2a-5$ —①



AP⊥($y=2x$) より

$\frac{b-3}{a+1}=-\frac{1}{2}$

$2(b-3)=-a-1$

∴ $a=-2b+5$ —②

①, ② より

$b=2(-2b+5)-5$

$5b=5$ ∴ $b=1$, $a=3$

よって P(3, 1)

(2) QA+QB=QP+QB

QP+QBが最小となるとき

Q, P, Bは一直線上に並ぶ。

このとき PB: $y=5x-4$ より

$5x-4=2x$ として

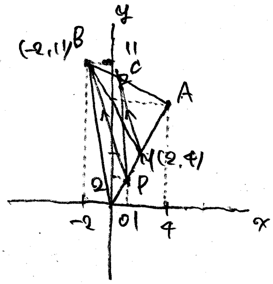
$x=\frac{4}{3}$ ∴ $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

<point>

1. 線対称である点の座標
2. 折れ線の長さの最小値

$\boxed{6}$

(1) Bを通ってOAの中点M(2, 4)を通る直線より



$y=-\frac{7}{4}x+\frac{15}{2}$

(2) Mを通りBPに平行な直線と

ABの交点をCとする

PB//MC より △MBP=△CBP

よって求める直線は直線PCである

△ACM∽△ABP より

CはBAを1:2に内分するから C(0, 10)

よって

$y=-8x+10$

<point>

1. 三角形の二等分

$\boxed{7}$

(1) $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ $(p>0>q)$ とおける

直線PQは

$$y-p^2=\frac{p^2-q^2}{p-q}(x-p)$$

$$y-p^2=(p+q)x-p(p+q)$$

$$\therefore y=(p+q)x-pq$$

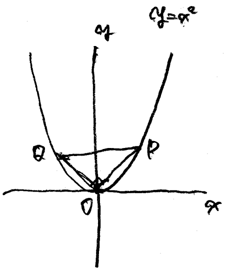
ここで、$\angle POQ$が直角より

$$pq=-1$$

よって

$$y=(p+q)x+1$$

したがってPQは$(0,1)$を通る



(2) $PQ=\sqrt{(p-q)^2+(p^2-q^2)^2}$

$$=\sqrt{(p-q)^2(1+(p+q)^2)}$$

$$=\sqrt{\{(p+q)^2-4pq\}\{(p+q)^2+1\}}$$

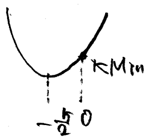
$$=\sqrt{\{(p+q)^2+4\}\{(p+q)^2+1\}}$$

$t=(p+q)^2$ とおくと $t\geqq 0$ 等号成立は $q=-p$ のとき

$$=\sqrt{(t+4)(t+1)}$$

$$=\sqrt{t^2+5t+4}$$

$$=\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$$



$t=0$のとき最小で

最小値 2 $(p=\pm1,\ q=\mp1)$

$\boxed{8}$

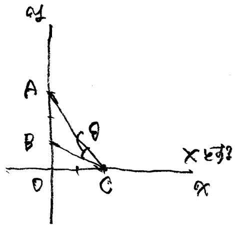
(1) $\angle XCB=\beta$, $\angle XCA=\alpha$ とおくと

$$\tan\beta=-\frac{1}{2},\quad \tan\alpha=-\frac{3}{2}$$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{1}{\frac{7}{4}}=\frac{4}{7}$$



(2) 同様にして

$$\tan\beta=\frac{-1}{c},\quad \tan\alpha=\frac{-3}{c}\quad (c>0)$$

$$\tan\theta=\frac{\frac{2}{c}}{1+\frac{3}{c^2}}=\frac{2}{c+\frac{3}{c}}\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$$

等号成立は $c=\frac{3}{c}$ すなわち $c=\boxed{\sqrt{3}}$ のとき

$\tan\theta>0$ であるから $0<\theta<90^\circ$

$0<\theta<90^\circ$で $\tan\theta$は単調増加であるから

θは $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大

最大値 $\boxed{30}$°

[別解]

A, Bを通り x軸と接する円を考える。接点をTとする

このとき $S(\sqrt{3}, 2)$, $T(\sqrt{3}, 0)$

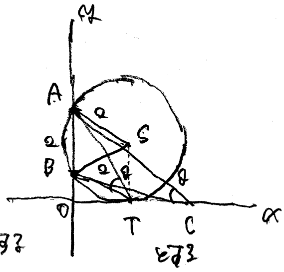
C=Tのとき最大となる

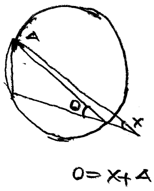
このとき$\angle ABC$は ABに対する円周角であるから

$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle ASB$$

$$=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$$

($\triangle ASB$は正三角形)





<point>

1. 2直線のなす角θ

$\tan\theta$ → 加法定理

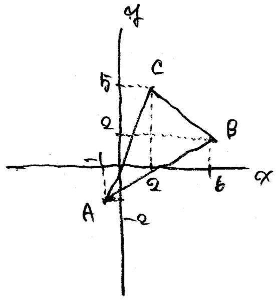
$\cos\theta$ → 内積　(角より)

$\boxed{9}$

BC: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}$

$$3x+4y-26=0$$

$$AH=\frac{|-3-8-26|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\boxed{37}}{\boxed{5}}$$



$\triangle ABC$の面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH$$

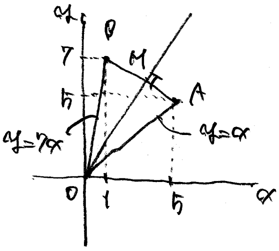
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{37}{5}=\frac{\boxed{37}}{\boxed{2}}$$

<point>

1. 点と直線の距離

[10]

(1) $OA = \boxed{5\sqrt{2}}$, $OB = \boxed{5\sqrt{2}}$



∠BOAの二等分線は

OとABの中点M(3, 6)を

通るから

$y = \boxed{2x}$

[別解]

∠BOAの二等分線上の点をP(x, y)とすると

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x-y|}{5\sqrt{2}}$$

ここでPは

$\begin{cases} y > x \\ y < 7x \end{cases}$　$\begin{cases} x-y<0 \\ 7x-y>0 \end{cases}$

の領域にあるから

$-5(x-y) = 7x-y$

$6y = 12x$　∴ $y = 2x$

△OABの面積Sは

$$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot OM = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5} = \boxed{15}$$

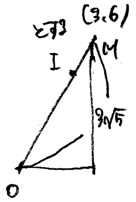
内接円の半径をrとすると

$\triangle OAB = \frac{1}{2}(OA+AB+OB)\cdot r$ より

$15 = \frac{1}{2}(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+5\sqrt{2})r$

$(5\sqrt{2}+\sqrt{5})r = 15$

$$∴ r = \frac{15}{5\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}}$$



$$OI = 3\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{10\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{3}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\frac{10\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{3}}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

$$= \frac{10\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{9\sqrt{5}}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

$$= \frac{10-\sqrt{10}}{9}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$ ∴ $I\left(\frac{10-\sqrt{10}}{3}, \frac{20-2\sqrt{10}}{3}\right)$

(2) OAの垂直二等分線は

$y - \frac{5}{2} = -\left(x - \frac{5}{2}\right)$

∴ $y = \boxed{-x+5}$

外心は各辺の垂直二等分線の交点より

$2x = -x+5$ として

∴ $x = \frac{5}{3}$　　∴ $\left(\boxed{\frac{5}{3}}, \boxed{\frac{10}{3}}\right)$

(3) 垂心は各頂点から対辺に下ろした垂線の交点である

BからOAに下ろした垂線は

$y - 7 = -(x-1)$

∴ $y = -x+8$

$2x = -x+8$ として

$x = \frac{8}{3}$　　∴ $\left(\boxed{\frac{8}{3}}, \boxed{\frac{16}{3}}\right)$