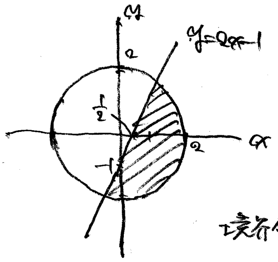
基本問題演習 28. 軌跡と領域(2)

$\boxed{1}$

I. (1) $\begin{cases} 2x-y-1 \geqq 0 & \therefore y \leqq 2x-1 \\ x^2+y^2-4 \leqq 0 & \therefore x^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$



境界含む

(2) $2x-y-a \geqq 0 \quad \therefore y \leqq 2x-a$

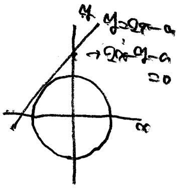
$y=2x-a$ が $x^2+y^2=4$ と接するとき

$$\frac{|-a|}{\sqrt{5}}=2$$

$\therefore a=\pm 2\sqrt{5}$

題意をみたすとき

$-a \geqq 2\sqrt{5} \quad \therefore a \leqq -2\sqrt{5}$



(3) $(x-1)^2+(y+1)^2 \leqq r^2$

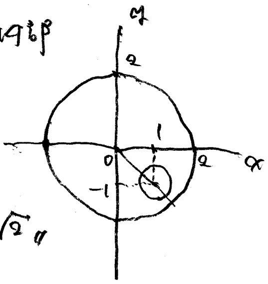
中心 $(1,-1)$, 半径 r の円の内部

題意をみたすとき

$2-r \geqq \sqrt{2}$

$\therefore r \leqq 2-\sqrt{2}$

よって r の最大値は $2-\sqrt{2}$



(4) $y=2x-a$ が $(x-1)^2+(y+1)^2=(2-\sqrt{2})^2$ と接するとき

$$\frac{|3-a|}{\sqrt{5}}=2-\sqrt{2}$$

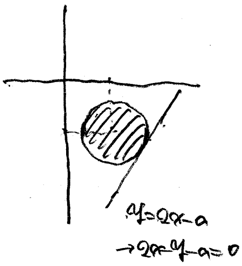
$|a-3|=2\sqrt{5}-\sqrt{10}$

$\therefore a=3\pm(2\sqrt{5}-\sqrt{10})$

題意をみたすとき

$-a<-3-2\sqrt{5}+\sqrt{10}$

$\therefore a>3+2\sqrt{5}-\sqrt{10}$



<point>

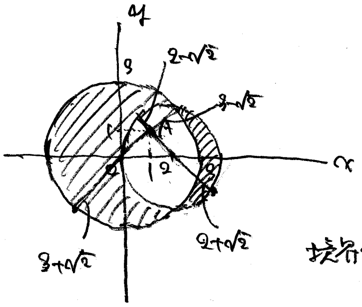
1. 不等式の表す領域

II.

(1) $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-4x) \leqq 0$

$\begin{cases} x^2+y^2-9 \geqq 0 \\ x^2+y^2-4x \leqq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} x^2+y^2-9 \leqq 0 \\ x^2+y^2-4x \geqq 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x^2+y^2 \geqq 9 \\ (x-2)^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \\ (x-2)^2+y^2 \geqq 4 \end{cases}$



境界含む

(2) A を中心とする円を考えて

最大値 $3+\sqrt{2}$

小 $2-\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

(1) $|x|+|y+1| \leqq 2$

$|y+1| \leqq -|x|+2$

(i) $y \geqq -1$ のとき

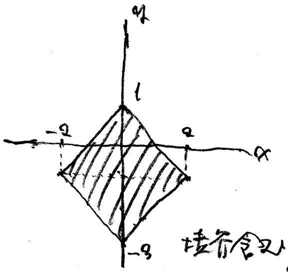
$y+1 \leqq -|x|+2$

$\therefore y \leqq -|x|+1$

(ii) $y<-1$ のとき

$-(y+1) \leqq -|x|+2$

$\therefore y \geqq |x|-3$



境界含む

(2) $x^2-2\sqrt{2}|x|+y^2 \leqq 2$

(i) $x \geqq 0$ のとき

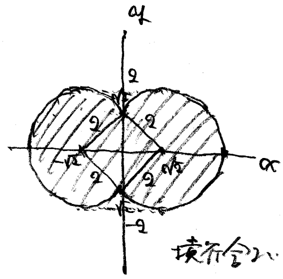
$x^2-2\sqrt{2}x+y^2 \leqq 2$

$(x-\sqrt{2})^2+y^2 \leqq 4$

(ii) $x<0$ のとき

$x^2+2\sqrt{2}x+y^2 \leqq 2$

$(x+\sqrt{2})^2+y^2 \leqq 4$



境界含む

図の斜線部の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot \frac{3\pi}{2}\cdot 2+2\cdot 2$$

$$=6\pi+4$$

3

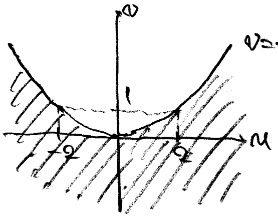
(1) 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-5 \\ \alpha\beta=2 \end{cases}$$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=21$ //

(2) 判別式をDとして $D\geqq 0$ より

$D=u^2-4v\geqq 0$ ∴ $v\leqq \frac{u^2}{4}$



境界含む //

(3) $(u,v)=(a+b,\ ab)$ とおく

$a^2+b^2\leqq 1$ より

$(a+b)^2-2ab\leqq 1$

$u^2-2v\leqq 1$

∴ $v\geqq \frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}$

a, bは実数であるから

$t^2-(a+b)t+ab=0$ すなわち $t^2-ut+v=0$ は

a, bを2解とする2次方程式であり

これが実数解をもつ

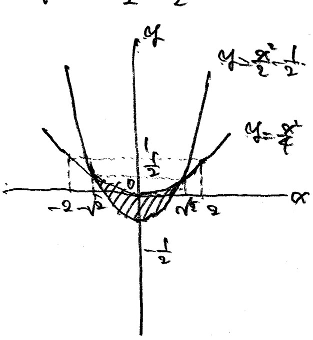
よって 求める領域は

$$\begin{cases} y\leqq \frac{x^2}{4} \\ y\geqq \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$ として

$x^2=2x^2-2$

$x=\pm\sqrt{2}$



境界含む //

4

I. (1) $-5=4a-a^2$

$a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$ ∴ $a=-1,\ 5$ //

(2) $10=6a-a^2$

$a^2-6a+10=0$ …①

判別式をDとすると

$D/4=9-10=-1<0$

より①を満たす実数aは存在しないので

l_a は $(3,10)$ を通らない //

(3) l_a が (X,Y) を通るとき

$Y=2aX-a^2$

$a^2-2Xa+Y=0$

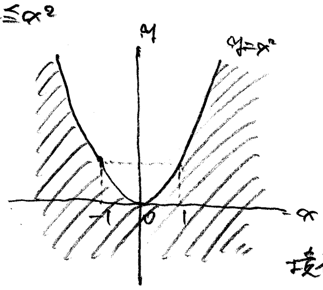
が実数解をもてばよいから

判別式をDとして $D\geqq 0$ より

$D/4=X^2-Y\geqq 0$ ∴ $Y\leqq X^2$

領域Sは

$y\leqq x^2$



境界含む //

II. [解1] 逆像法

$y=(2t-2)x-t^2-1$ … l とする

l が (X,Y) を通るとき

$Y=(2t-2)X-t^2-1$

$t^2-2Xt+2X+Y+1=0$

が $0\leqq t\leqq 1$ に少なくとも1つの実数解をもてばよい

→ 解の配置…大変.

[解2] 順像法

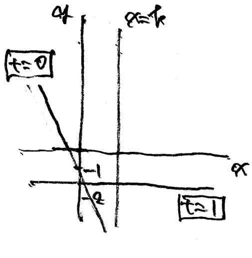
$y=(2t-2)x-t^2-1$

$x=k$ で切ると

$y=-t^2+2kt-2k-1$

これを $0\leqq t\leqq 1$ で動かして

yの動く範囲を求める

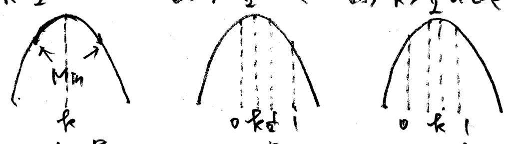


$f(t)=-t^2+2kt-2k-1$

$=-(t-k)^2+k^2-2k-1$

最小値

i) $k=\frac{1}{2}$のとき　ii) $k<\frac{1}{2}$のとき　iii) $k>\frac{1}{2}$のとき

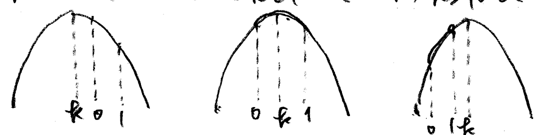


$t=0,1$で最小　$t=1$で最小　$t=0$で最小

最小値 -2　最小値 -2　最小値 $-2k-1$

最大値

i) $k<0$のとき　ii) $0\le k\le 1$のとき　iii) $k>1$のとき

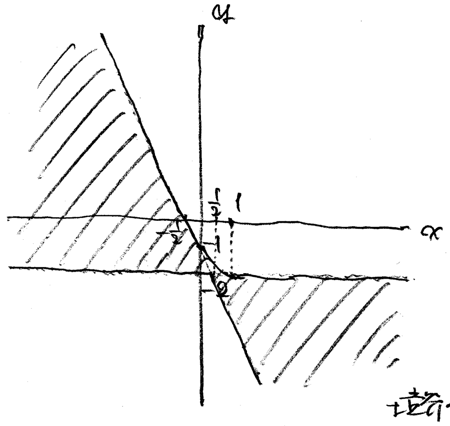


$t=0$で最大　$t=k$で最大　$t=1$で最大

最大値 $-2k-1$　最大値 k^2-2k-1　最大値 -2

$=(k-1)^2-2$

$x=k$においてkを動かして



境界含む.

【解3】包絡線を利用

包絡線にある直線群に属するすべての直線に接する直線

$y=(2t-2)x-t^2-1$

$=-t^2+2xt-2x-1$

$=-(t-x)^2+x^2-2x-1$ …① ←tについて平方完成

$y=x^2-2x-1$ …②

①,②より

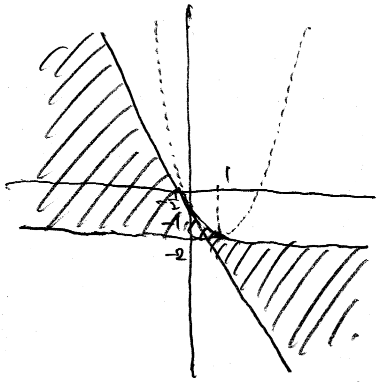
$y=-(t-x)^2+y$

$(x-t)^2=0$

よって①と②は$x=t$ $(0\le t\le 1)$で接する

すなわち②は①の包絡線である

tを$0\le t\le 1$で動かして



$y=x^2-2x-1$

$=(x-1)^2-2$

$f(x)=x^2-2x-1$とおく

$f'(x)=2x-2$

$y=f(x)$の$x=0$における接線は

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$y+1=-2(x-0)$

∴ $y=-2x-1$

注.

$y=-(t-x)^2+x^2-2x-1$

$-(t-x)^2\underbrace{-y+x^2-2x-1}_{0}=0$ …(*)

包絡線は(*)の方程式において

$-y+x^2-2x-1=0$としたものなので

(*)をtの方程式とみて

(*)が重解をもてばよいから、

判別式をDとして$D=0$とすれば求まる

<point>

$\boxed{5}$ 1. 直線の通過領域

(1) $y=x^2-2tx+2t^2-2t-3$

$x=k$のとき

$y=2t^2-2(k+1)t+k^2-3=f(t)$とおく

これを$t\le 1$で動かして

yの動く範囲を求める

$f(t)=2\{t-\frac{k+1}{2}\}^2-\frac{(k+1)^2}{2}+k^2-3$

$=2(t-\frac{k+1}{2})^2+\frac{k^2}{2}-k-\frac{7}{2}$

$y=f(t)$は頂点または端点で最小値をとるから

(最大値はない)

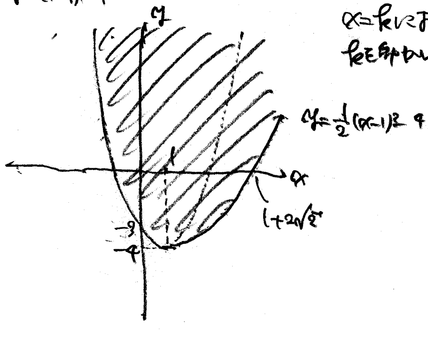
頂点 $f(\frac{k+1}{2})=\frac{k^2}{2}-k-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(k-1)^2-4$

$(\frac{k+1}{2}\geqq 1)$

∴ $k\geqq 1$

端点 $f(1)=k^2-2k-3=(k-1)^2-4$

$y=(x-1)^2-4$



$x=k$において

kを動かして

(2) $(x-2m)^2+(y+m)^2=m^2$ … C

Cが(X, Y)を通るとき

$(X-2m)^2+(Y+m)^2=m^2$

$4m^2-2(2X-Y)m+X^2+Y^2=0$

をmの方程式とみて

少なくとも1つの実数解をもてばよいから

判別式をDとして $D\geq 0$ より

$D/4=(2X-Y)^2-4(X^2+Y^2)$

$=-4XY-3Y^2\geq 0$

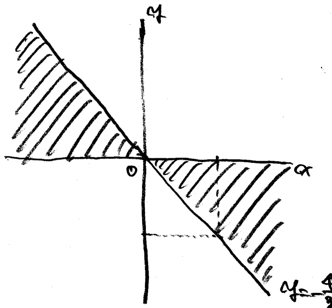
$Y(4X+3Y)\leq 0$

よって求める領域は

$y(4x+3y)\leq 0$

$\therefore \begin{cases} y\geq 0 \\ 4x+3y\leq 0 \end{cases}$ or $\begin{cases} y\leq 0 \\ 4x+3y\geq 0 \end{cases}$

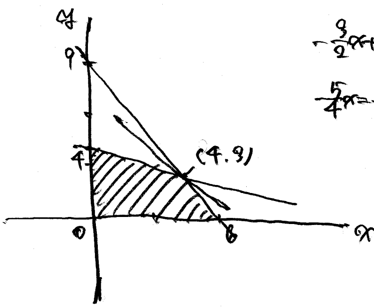
$\therefore \begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq -\frac{4}{3}x \end{cases}$ $\begin{cases} y\leq 0 \\ y\geq -\frac{4}{3}x \end{cases}$



$y=-\frac{4}{3}x$ 境界含む

6

I. (1) $\begin{cases} 3x+2y\leq 18 \rightarrow y\leq -\frac{3}{2}x+9 \\ x+4y\leq 16 \rightarrow y\leq -\frac{1}{4}x+4 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$



$-\frac{3}{2}x+9=-\frac{1}{4}x+4$ として

$-\frac{5}{4}x=-5$ $\therefore x=4$

境界含む

(2) $x+y=k$ とおく

$y=-x+k$ がDと共有点をもつときの

kの最大値を求めればよい

kはこの直線のy切片を表すから

最大値は7

(3) $2x+y=l$ とおく

同様に

最大値は12

(4) $ax+y=m$ とおく

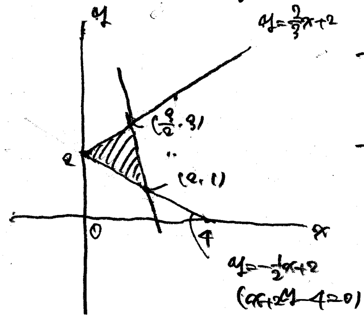
$y=-ax+m$

i) $0\leq a\leq \frac{1}{4}$ のとき 4

ii) $\frac{1}{4}<a<\frac{3}{2}$ 〃 $4a+3$

iii) $a\geq \frac{3}{2}$ のとき $6a$

II. $\begin{cases} 4x+y\leq 9 \rightarrow y\leq -4x+9 \\ x+2y\geq 4 \rightarrow y\geq -\frac{1}{2}x+2 \\ 2x-3y\geq -6 \rightarrow y\leq \frac{2}{3}x+2 \end{cases}$



$-4x+9=-\frac{1}{2}x+2$ として

$\frac{7}{2}x=7$ $\therefore x=2$

$-4x+9=\frac{2}{3}x+2$ として

$\frac{14}{3}x=7$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

の表す領域は図の斜線部

ただし境界含む

これをDとする

$2x+y=k$ とおく

$y=-2x+k$ がDと共有点をもつときの

kの最大・最小値を求めればよい

最大値 6

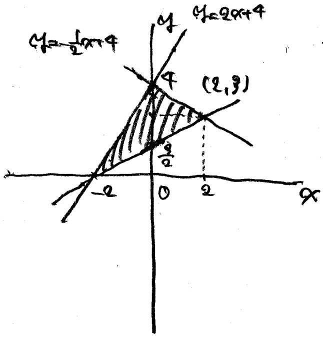
最小 〃 2

$x^2+y^2=l$ とおく 同様に

最大値 $\frac{9}{4}+9=\frac{45}{4}$

最小 〃 $\frac{|-4|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

III.(1) $\begin{cases} x+2y-8 \leqq 0 \rightarrow y \leqq -\frac{1}{2}x+4 \\ 2x-y+4 \geqq 0 \rightarrow y \leqq 2x+4 \\ 3x-4y+6 \leqq 0 \rightarrow y \geqq \frac{3}{4}x+\frac{3}{2} \end{cases}$



$-\frac{1}{2}x+4=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ として

$\frac{5}{4}x=\frac{5}{2}$ ∴ $x=2$

$2x+4=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ として

$\frac{5}{4}x=-\frac{5}{2}$ ∴ $x=-2$

(2) $x+y=k$ とおく

$y=-x+k$ が D と共有点をもつときの

k の最大・最小を求めればよい

最大値 5 $(x=2\ y=3)$

〃 -2 $(x=-2,\ y=0)$〃

(3) $x^2+y=l$ とおく

同様にして

最大値 7 $(x=2,\ y=3)$

$y=-x^2+l$ と $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ が接するとき

$-x^2+l=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

$4x^2+3x-6-4l=0$

が重解をもてばよいから

判別式を D とすると D=0 より

$D=9-16(-6-4l)$

$=64l+105=0$ ∴ $l=-\frac{105}{64}$

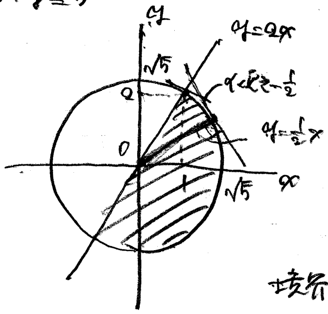
このとき重解は $x=-\frac{3}{8}$

最小値 $-\frac{105}{64}$ $(x=-\frac{3}{8},\ y=\frac{39}{32})$〃

<point>

1. 線形計画法

7 (1) $\begin{cases} 2x-y \geqq 0 \rightarrow y \leqq 2x \\ y \geqq 0 \\ x^2+y^2 \leqq 5 \end{cases}$



境界含む〃

$2x+y=k$ とおく

$y=-2x+k$ が D と共有点をもつときの

k の最大値を求めればよい

最大値 5 $(x,y)=(2,1)$〃

(2) $ax+y=l$ とおく

$y=-ax+l$

$-a \geqq -\frac{1}{2}$ とすればよいから $a \leqq \frac{1}{2}$〃

8.

食品 X を $100x$ (g)

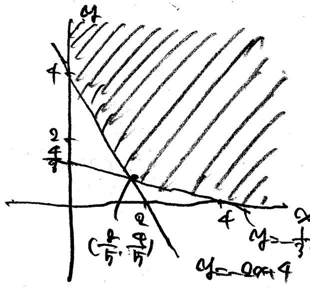
Y $100y$ (g) 混合したとする

栄養素 a を 8(mg) 以上

b 80(mg) 〃 含むとき

$\begin{cases} 4x+2y \geqq 8 \rightarrow y \geqq -2x+4 \\ 20x+60y \geqq 80 \rightarrow y \geqq -\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \end{cases}$

費用は $80x+60y$ …



$-2x+4=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ として

$\frac{5}{3}x=\frac{8}{3}$ ∴ $x=\frac{8}{5}$

境界含む

D とする

$80x+60y=k$ とおく

$y=-\frac{4}{3}x+\frac{k}{60}$ が D と交わるときの

k の最小値を求めればよい

最小値は $128+48=176$ 円

X を $\boxed{160}$ g, Y を $\boxed{80}$ g 混ぜればよい〃