高2数学　基本問題演習　演習　29. 微分法(1)

$\boxed{1}$ [(1) 立命館大　(2) 国士舘大　(3) 立教大　(4) 久留米大　(5) 青山学院大]

(1) $\displaystyle\lim_{a \to 3} \frac{a^3-27}{a-3}$ の値を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to -4} \frac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2}=1$ が成り立つとする．このとき $a=$ ${}^{ア}\boxed{}$, $b=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である．

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2+ax+b}=3$ のとき，a，b の値を求めよ．

(5) a, b が $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{3x^2+5bx-2b^2}{x^2-(2+a)x+2a}=7$ を満たす．このとき a, b の値を求めよ．

$\boxed{2}$ [(1) 2008 明治大　(2) 弘前大　(3) 1999 神奈川大]

(1) $f(x)$ の $x=1$ における微分係数が存在するとき，次の極限値を $f(1)$，$f'(1)$ で表せ。

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-x^3f(1)}{x-1}$$

(2) 関数 $y=f(x)$ において，次の値を $a, f(a), f'(a)$ を用いて表せ．

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2f(x)-a^2f(a)}{x^2-a^2}$$

(3) 関数 $f(x)$ の $x=3$ における微分係数が 3 ならば

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+4h)-f(3-2h)}{h}=\boxed{}$$

である．

$\boxed{3}$ [(1) 愛媛大 (2) 大阪経済大 (3) 近畿大 (4) 神戸薬科大 (5) 大阪薬科大 (6) 鳥取大]

(1) 導関数の定義に従って，関数 $f(x)=x^3$ を微分せよ。

(2) 3 次関数 $f(x)=x^3-3x^2+6x-9$ について，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ を求めよ。

(3) 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $f(1)=0$ を満たし，更に

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h+1)}{h}=-3,\ \lim_{h \to 0} \frac{f(h+2)-f(2)}{h}=3$$

を満たしている。このとき $a=$ ${}^{ア}\boxed{}$，$b=$ ${}^{イ}\boxed{}$，$c=$ ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

(4) 次の極限値を求めると，$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}=$ ${}^{ア}\boxed{}$ であり，

$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(2x+h)^3-(2x)^3}{h}=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-(a-h)^3}{h}$ を求めよ.

(6) 関数 $y=(x+1)(x+2)(x+3)$ を x について微分せよ.

$\boxed{4}$ [Ⅰ. 2009 大阪大　Ⅱ. 2016 北海道大　Ⅲ. 2017 早稲田大]

Ⅰ. 曲線 $C: y=x^3-kx$ (k は実数) を考える。C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3-ka)$ ($a\fallingdotseq 0$) をとる。次の問いに答えよ。

(1)　点 A における C の接線を ℓ_1 とする。ℓ_1 と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2)　点 B における C の接線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき，a と k が満たす条件を求めよ。

(3)　ℓ_1 と ℓ_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

Ⅱ. a，b，c を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある。

(1)　P における C の接線の方程式を求めよ。

(2)　P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s，t，a の関係式として求めよ。

(3)　(2) の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。

Ⅲ. 3 次関数 $y=f(x)=x^3-4x$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　点 $(1,\ -4)$ から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線のうち，傾きが正の値となるものの方程式は，$y=$ $^{ア}\boxed{}$ である。

(2)　(1) で求めた接線と曲線 $y=f(x)$ との共有点のうち，接点以外の点の座標は，$(x,\ y)=\left({}^{イ}\boxed{},\ {}^{ウ}\boxed{}\right)$ である。

$\boxed{5}$ [Ⅰ. 2003 関西大　Ⅱ. 2013 北里大]

Ⅰ. 放物線 $C: y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ をとる．ただし $s<0<t$ とする．P における C の接線と Q における C の接線の交点を R とする．

(1)　R の座標を s と t で表せ.

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$ のとき，s を t で表せ.

(3)　$\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$ で t が $t>0$ の範囲を動くとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 S の最小値を求めよ.

高2数学　基本問題演習　演習　29. 微分法(1)

Ⅱ．$f(x)=x^3-x^2+12$ とおく。原点を通り，曲線 $y=f(x)$ に接する直線を ℓ とする。

(1)　直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ との接点以外の共有点の座標を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ との共有点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$，$\mathrm{Q}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{R}(c,\ f(c))$ が $a<c<b$ を満たしながら動くとき，三角形PQRの面積が最大となるような c の値を求めよ。

$\boxed{6}$ [(1) 2007 自治医科大　(2) 2002 早稲田大　(3) 2020 福島県立医科大]

(1) 2つの曲線 $y=-x^3+a$，$y=-x^2+bx+c$ は，点 $(-1,\ 2)$ で接線を共有している。$a-b-c$ の値を求めよ。

(2) a，b を実数の定数とする．2つの曲線 C_1：$y=x^3+ax+3$ と C_2：$y=x^2+b$ は第1象限内の1点で接線を共有し，その接線 L は点 $(0,\ -a)$ を通る．このとき，a，b の値と接線の方程式を求めよ．

(3) 座標平面上の2つの曲線 $y=x^3-5x$ と $y=ax^2-5x$ は2つの交点を有し，1つの交点における各接線は直交している。a の値をすべて求めよ。

$\boxed{7}$ [2014 南山大]

$a>0$ とする。放物線 $y=x^2$ と円 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ がただ1つの共有点Pをもち，Pと円の中心を通る直線の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるとき，Pの座標 $(x,\ y)$ を求めると

$(x,\ y)=$ ア $\boxed{}$ であり，a と b の値を求めると $(a,\ b)=$ イ $\boxed{}$ である。

$\boxed{8}$ [2007 熊本大]

a を定数とする。2つの放物線 C_1：$y=-x^2$，C_2：$y=3(x-1)^2+a$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C_1，C_2 の両方に接する直線が2本存在するための a の条件を求めよ。

(2)　C_1，C_2 の両方に接する2本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

(3)　C_1，C_2 の両方に接する2本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ。

$\boxed{9}$ [2003 学習院大]

a を実数とする．2 つの曲線 $y=x^3-x$ と $y=x^2+a$ の両方に接する直線の個数を求めよ．

$\boxed{10}$ [2018 学習院大]

円 $x^2+(y+1)^2=1$ の接線 ℓ が，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と x 座標が正の点で接するとき，ℓ の方程式を求めよ。