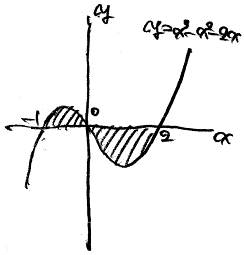
基本問題演習 33. 積分法(2)

1

$y=x^3-x^2-2x$
$\quad =x(x+1)(x-2)$



$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx$
$\quad -\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}$

$=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$ //

<point>

1. 曲線とx軸とで囲まれた部分の面積

2

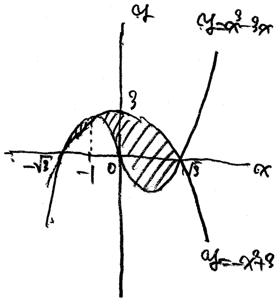
(1) $x^3-3x=-x^2+3$ として

$x^3+x^2-3x-3=0$

$x^2(x+1)-3(x+1)=0$

$(x^2-3)(x+1)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}, -1$



(2) 求める面積Sは

$S=\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\{(x^3-3x)-(-x^2+3)\}dx$
$\quad +\int_{-1}^{\sqrt{3}}\{(-x^2+3)-(x^3-3x)\}dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-3x\right]_{-\sqrt{3}}^{-1}$ 〃F(x)とおいて

$\quad -\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-3x\right]_{-1}^{\sqrt{3}}$

$=F(-1)-F(-\sqrt{3})-(F(\sqrt{3})-F(-1))$

$=2F(-1)-F(-\sqrt{3})-F(\sqrt{3})$

$=2\cdot\frac{17}{12}-\left(-\frac{9}{4}+2\sqrt{3}\right)-\left(-\frac{9}{4}-2\sqrt{3}\right)=\frac{22}{3}$ //

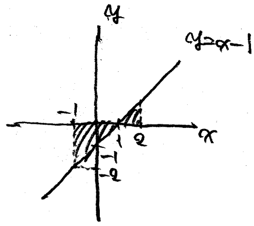
<point>

1. 2曲線で囲まれる部分の面積

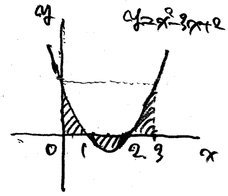
3

(1) $\int_{-1}^{2}|x-1|dx$

$=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{5}{2}$ //



(2) $\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx$



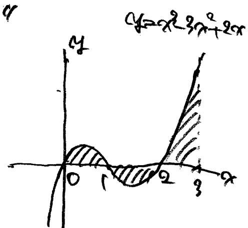
$=\int_{0}^{3}|(x-1)(x-2)|dx$

$=2\int_{0}^{1}(x^2-3x+2)dx$
$\quad -\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)dx$

$=2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}$

$=2\times\frac{5}{6}-\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{2}+2\right)=\frac{11}{6}$ //

(3) $I=\int_{-1}^{2}|x^3-3x^2+2x|dx$



$=\int_{-1}^{2}|x(x-1)(x-2)|dx$

$=2\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx$
$\quad +\int_{2}^{3}(x^3-3x^2+2x)dx$

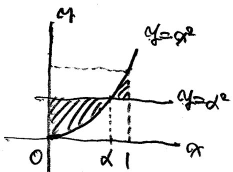
$=2\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_{2}^{3}$

$=2\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{65}{4}-(9+5)\right)=\frac{11}{4}$ //

<point>

1. $\int_{a}^{b}|f(x)|dx = a\leqq x\leqq b$ で $y=f(x)$ とx軸とで囲まれる部分の面積

4



I. (1) $F(\alpha)=2\int_{0}^{1}|x^2-\alpha^2|dx$

(i) $0\leqq\alpha\leqq1$ のとき

$F(\alpha)=2\left(\int_{0}^{\alpha}(\alpha^2-x^2)dx+\int_{\alpha}^{1}(x^2-\alpha^2)dx\right)$

$=2\left(\left[\alpha^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\alpha}+\left[\frac{x^3}{3}-\alpha^2x\right]_{\alpha}^{1}\right)$

$=2\left(\frac{2}{3}\alpha^3+\frac{1}{3}-\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^3\right)$

$=2\left(\frac{4}{3}\alpha^3-\alpha^2+\frac{1}{3}\right)=\cdots$

(ii) $\alpha>1$ のとき

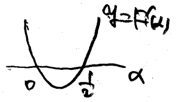
$F(\alpha)=\int_{0}^{1}(\alpha^2-x^2)dx$

$=\left[\alpha^2x-x^3\right]_{0}^{1}$

$=\alpha^2-1$ (詳細は省略)

(2) (i) $0 \leqq \alpha \leqq 1$ のとき

$F'(\alpha) = 2(4\alpha^2 - 2\alpha)$
$= 4\alpha(2\alpha - 1)$



$F'(\alpha) = 0$ として $\alpha = 0, \frac{1}{2}$

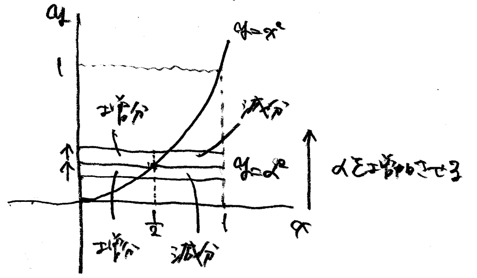
α	0		$\frac{1}{2}$		1
$F'(\alpha)$		−	0	+	
$F(\alpha)$		↘	極小	↗	

(ii) $\alpha \geqq 1$ のとき単調に増加

$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき極小かつ最小. 最小値 $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$F(0) = \frac{2}{3}$. $F(2) = 14$ より 最大値は14 〃

[別解] はみ出し削り論法



$\int_0^1 |x^2 - \alpha| dx$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で $y=x^2$ と $y=\alpha$ とで囲まれる部分の面積に等しい

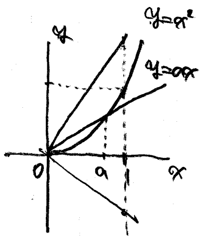
αを増加させるとして

$\alpha < \frac{1}{2}$ のときは 増分<減分なので $F(\alpha)$は減少

$\alpha > \frac{1}{2}$ 〃 > $F(\alpha)$は増加

よって $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき 最小 〃

II. (1) $\int_0^1 |x^2 - ax| dx = I(a)$ とおく



(i) $a \leqq 0$ のとき

$I(a) = \int_0^1 (x^2 - ax) dx$
$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^1$
$= \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$ (単調減少)

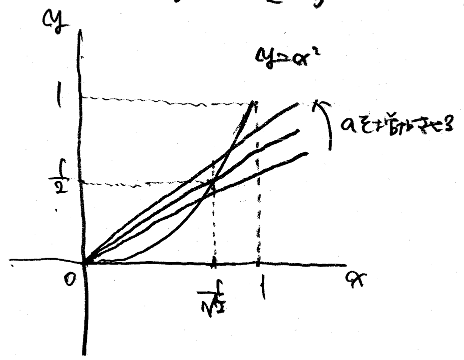
(ii) $0 < a < 1$ のとき

$I(a) = \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx$
$= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1$
$= \frac{a^3}{6} + \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{6}$
$= \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$

(iii) $a \geqq 1$ のとき

$I(a) = \int_0^1 (ax - x^2) dx$
$= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$ (単調増加) 〃

(2)



(1)と同様に aを増加させて

$a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき 増分<減分なので $I(a)$は減少

$a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 〃 > $I(a)$は増加

よって $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき 最小.

<point>

1. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = a \leqq x \leqq b$ で $y=f(x)$ と $y=g(x)$ とで囲まれる部分の面積

$\boxed{5}$

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ とおく

$f'(x) = x$

l_1の方程式は

$y - \frac{1}{2} = f'(1)(x-1)$

$y - \frac{1}{2} = 1 \cdot (x-1)$

$\therefore y = x - \frac{1}{2}$ 〃

(2) l_2の方程式は

$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)$

$y - \frac{1}{2} = -1(x-1)$

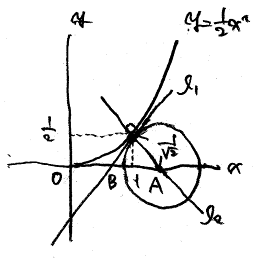
$\therefore y = -x + \frac{3}{2}$

これとx軸との交点は

$-x + \frac{3}{2} = 0$ $\therefore x = \frac{3}{2}$ $\therefore A(\frac{3}{2}, 0)$ 〃

(3) $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 〃

(4) $B(\frac{3-\sqrt{2}}{2}, 0)$ 〃



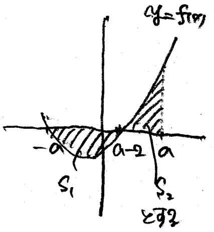
(5) 求める面積Sは

$$S=\int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^1-\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}\right)$$
$$=\frac{7}{24}-\frac{\pi}{16}$$

$\boxed{6}$

I. (1) $x^2+2x-a^2+2a=0$
$$x^2+2x-a(a-2)=0$$
$$\{x+a\}\{x-(a-2)\}=0$$
$$\therefore x=-a,\ a-2$$

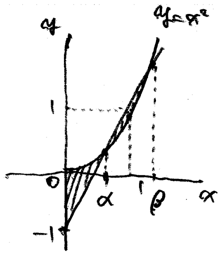
(2) $S_1=S_2$のとき



$$-\int_{-a}^{a-2}f(x)dx=\int_{a-2}^{a}f(x)dx$$
$$\int_{-a}^{a-2}f(x)dx+\int_{a-2}^{a}f(x)dx=0$$
$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$$
$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2x-a^2+2a)dx$$
$$=2\int_0^a(x^2-a^2+2a)dx$$
$$=2\left[\frac{x^3}{3}+(-a^2+2a)x\right]_0^a$$
$$=2\left(-\frac{2}{3}a^3+2a^2\right)=0$$
$$a^2(a-3)=0$$

$a>1$ より $a=3$

II. $x^2=cx-1$ として



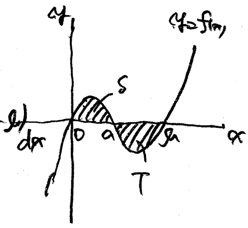
$$x^2-cx+1=0 \text{ — ①}$$
が2実解をもつとき
判別式をDとして $D>0$ より
$$c^2-4>0$$
$$\therefore c<-2,\ c>2$$
対称性より $x>0$ で考える $(c>2)$
①の2実解をα,βとして $(\alpha<\beta)$
$S_1=S_2$ より
$$\int_0^{\alpha}(x^2-cx+1)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(cx-1-x^2)dx$$
$$\int_0^{\alpha}(x^2-cx+1)dx=0$$
$$\left[\frac{x^3}{3}-\frac{c}{2}x^2+x\right]_0^{\alpha}=0$$
$$\therefore \frac{\alpha^2}{3}-\frac{c}{2}\alpha+1=0 \text{ — ①}$$

また解と係数の関係より
$$\begin{cases}\alpha+\beta=c \text{ — ②}\\ \alpha\beta=1 \text{ — ③}\end{cases}$$
②,③より
$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=c \qquad \therefore \alpha^2-c\alpha+1=0 \text{ — ④}$$
①,④より
$$\frac{\alpha^2}{3}-1=0$$
$$\alpha^2=3 \qquad \therefore \alpha=\sqrt{3}$$
このとき
$$3-\sqrt{3}c+1=0 \qquad \therefore c=\frac{4}{\sqrt{3}}\ \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$c=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

<point>
1. 面積の二等分

$\boxed{7}$

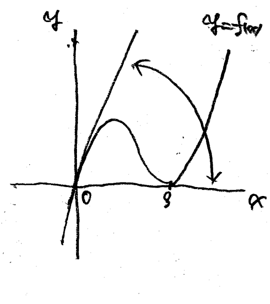
S=Tのとき



$$\int_0^a x(x-a)(x-b)dx=-\int_a^b x(x-a)(x-b)dx$$
$$\int_0^b x(x-a)(x-b)dx=0$$
$$\int_0^b x^2(x-b)dx-a\int_0^b x(x-b)dx=0$$
$$-\frac{1}{12}b^4+\frac{a}{6}b^3=0$$
$$b^4-2ab^3=0$$
$$\therefore b=\boxed{2}a$$

このとき
$$S=\int_0^a x(x-a)(x-2a)dx$$
$$=\int_0^a x^2(x-a)dx-2a\int_0^a x(x-a)dx$$
$$=-\frac{a^4}{12}+2a\cdot\frac{a^3}{6}=\frac{a^{\boxed{4}}}{\boxed{4}}$$

$\boxed{8}$

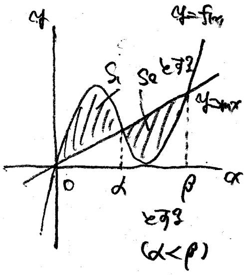


(1) $f(x)=x(x-3)^2$ とおく
$$f'(x)=(x-3)^2+2x(x-3)$$
$$=3(x-1)(x-3)$$
$f'(0)=9$ より
$$0<m<9$$

[別解]
$x(x-3)^2=mx$ として
$$x\{(x-3)^2-m\}=0$$
$(x-3)^2-m=0$ が異なる2つの正の解をもつ条件から
求めてもよい。

(2) $S_1=S_2$ となるとき

$$\int_0^{\alpha}\{x(x-3)^2-mx\}dx=-\int_{\alpha}^{\beta}\{mx-x(x-3)^2\}dx$$



$$\int_0^{\beta}\{x(x-3)^2-mx\}dx=0$$

$$\int_0^{\beta}x(x-\alpha)(x-\beta)dx=0$$

$$\int_0^{\beta}x^2(x-\beta)dx-\alpha\int_0^{\beta}x(x-\beta)dx=0$$

$$-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{\alpha}{6}\beta^3=0$$

$\therefore \beta=2\alpha$ —①

α,β は $x^2-6x+9-m=0$ の解より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6 & \text{—②}\\ \alpha\beta=9-m & \text{—③}\end{cases}$$

①〜③より

$\alpha=2,\ \beta=4,\ m=1$ //

[別解]

3次関数は変曲点に関して対称であるから、ℓ が変曲点を通るとき2つの図形の面積が等しくなる。

(3) 求める面積 S は

$$S=2\int_0^2\{x(x-3)^2-x\}dx$$

$$=2\int_0^2 x(x-2)(x-4)dx$$

$$=2\left\{\int_0^2 x^2(x-2)dx-4\int_0^2 x(x-2)dx\right\}$$

$$=2\left\{-\frac{1}{12}\cdot 2^4+\frac{4}{6}\cdot 2^3\right\}=8$$ //

$\boxed{9}$

(1) $x(x-1)^2=kx^2$ として

$$x\{(x-1)^2-kx\}=0$$

$$x\{x^2-(k+2)x+1\}=0$$

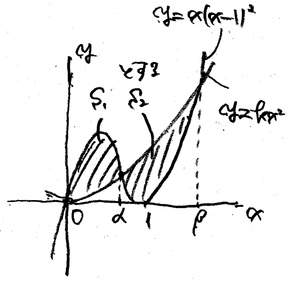
$x^2-(k+2)x+1=0$ —① の判別式を D、2解を $x=\alpha,\beta$ とすると

$$D=(k+2)^2-4>0\ (k>0)$$

$$\alpha\beta=1$$

であるから①は0でない異なる2実解をもつので題意は示された。

(2) $S_1=S_2$ となるとき



$$\int_0^{\alpha}\{x(x-1)^2-kx^2\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{kx^2-x(x-1)^2\}dx$$

$$\int_0^{\beta}\{x(x-1)^2-kx^2\}dx=0$$

$$\int_0^{\beta}x(x-\alpha)(x-\beta)dx=0$$

$\therefore \beta=2\alpha$ —①

解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=k+2 & \text{—②}\\ \alpha\beta=1 & \text{—③}\end{cases}$$

①〜③より

$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \beta=\sqrt{2},\ k=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$ //

[別解]

$$\int_0^{\beta}\{x\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1}-kx^2\}dx=\int_0^{\beta}\{x^3-(k+2)x^2\overset{-(-x)}{+x}\}dx=0$$

$0\leqq x\leqq\beta$ で $y=x^3-(k+2)x^2$ と $y=-x$ とで囲む面積

$y=-x$ が $y=x^3-(k+2)x^2$ の変曲点を通るとき

$S_1=S_2$

$f(x)=x^3-(k+2)x^2$ とおく

$f'(x)=3x^2-2(k+2)x$

$f''(x)=6x-2(k+2)$

$f''(x)=0$ として

$x=\frac{k+2}{3}$

より $f\left(\frac{k+2}{3}\right)=-\frac{k+2}{3}$ となればよい

$$\frac{(k+2)^3}{27}-\frac{(k+2)^3}{9}=-\frac{k+2}{3}$$

$(k+2)^2=\frac{9}{2}$ $\quad\therefore k=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$ //