基本問題演習 31. 微分法(3)

[1]

$f(x)=x^3+2x^2+2x-2$ とおく.

$f'(x)=3x^2+4x+2=3(x+\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}>0$ より

$f(x)$は単調増加で、かつ

$f(-0.5)=-0.125+0.5-1-2<0$

$f(1)=3>0$ より

$f(x)=0$は実数解をただ1つもち、かつ $-0.5<\alpha<1$ //

<point>

1. $f(x)=0$の実数解は
$y=f(x)$と$y=0$の共有点のx座標である

[2]

I. (1) $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-k=0$

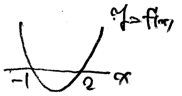
$\Leftrightarrow x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=k$ …① $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$ とおく

①の実数解は $y=f(x)$と$y=k$の共有点のx座標に等しい

$f'(x)=3x^2-3x-6$
$=3(x+1)(x-2)$

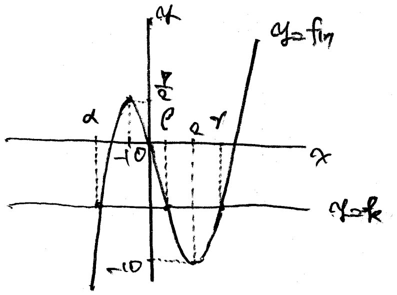
$f'(x)=0$として $x=-1,2$

x		-1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=-1$で極大 極大値 $f(-1)=\frac{7}{2}$

$x=2$ 〃 小 〃 $f(2)=-10$



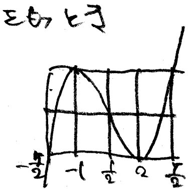
グラフより 異なる3つの実数解をもつとき

$-10<k<\frac{7}{2}$

(2) グラフより

$-\frac{5}{2}<\alpha<-1,\ -1<\beta<2$

$2<\gamma<\frac{7}{2}$ //



(3) 解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2} & \text{—①}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6 & \text{—②}\end{cases}$$

$\alpha\beta\gamma=k$ —③

②より

$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)-6$

①より

$=-\beta(\frac{3}{2}-\beta)-6$

$=\beta^2-\frac{3}{2}\beta-6$ $(-1<\beta<2)$

$=(\beta-\frac{3}{4})^2-\frac{105}{16}$

$\beta=\frac{3}{4}$のとき 最小で最小値は $\boxed{-\frac{105}{16}}$

このとき ③より

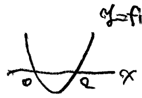
$k=-\frac{105}{16}\cdot\frac{3}{4}=\boxed{-\frac{315}{64}}$

II. (1) $f(x)=x^3-3x^2$

$f'(x)=3x^2-6x$
$=3x(x-2)$

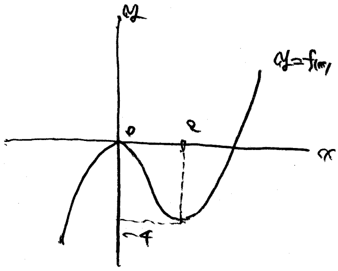
$f'(x)=0$として $x=0,2$

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=0$で極大 極大値 $f(0)=0$

$x=2$ 〃 小 〃 $f(2)=-4$



(2) $|f(x)|=a$の異なる実数解の個数は
$y=|f(x)|$と$y=a$の共有点の個数に等しいから

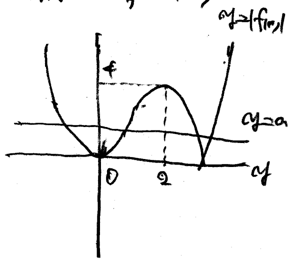
グラフより

$a=0$のとき 2個

$0<a<4$のとき 4個

$a=4$ 〃 3個

$a>4$ 〃 2個 //



<point>

1. $f(x)=a$の実数解の個数

[3]

I. [解1] 極値を利用

$f(x)=x^3-3ax+4\sqrt{2}$ とおく

$f'(x)=3x^2-3a$

(i) $a\leqq 0$ のとき

$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加

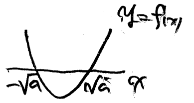
よって $f(x)=0$ の実数解の個数は 1.

(ii) $a>0$ のとき

$f'(x)=3(x^2-a)$

$f'(x)=0$ として $x=\pm\sqrt{a}$

x		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=-\sqrt{a}$ で極大 極大値 $f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+4\sqrt{2}$

$x=\sqrt{a}$ 〃 〃 $f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+4\sqrt{2}$

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})=(4\sqrt{2}+2a\sqrt{a})(4\sqrt{2}-2a\sqrt{a})$

$=32-4a^3>0$ すなわち $a<2$ のとき 1個

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})=0$ すなわち $a=2$ のとき 2個

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})<0$ 〃 $a>2$ のとき 3個

(i), (ii) より

$a<2\sqrt[3]{4}$ のとき 1個

$a=2\sqrt[3]{4}$ 〃 2個

$a>2\sqrt[3]{4}$ 〃 3個

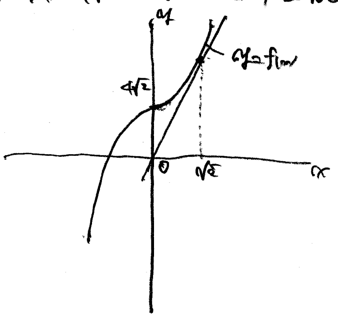
[解2] グラフを利用

$x^3-3ax+4\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow x^3+4\sqrt{2}=3ax$ —①

①の異なる実数解の個数は

$y=x^3+4\sqrt{2}$ と $y=3ax$ の共有点の個数に等しい



$f(x)=x^3+4\sqrt{2}$ とおく

$f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3+4\sqrt{2})=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+4\sqrt{2}$

これが原点を通るとき

$0=-2t^3+4\sqrt{2}$

$t^3=2\sqrt{2}$ $\therefore t=\sqrt{2}$

このとき 接線の傾きは 6 より

$3a=6$ $\therefore a=2$

よって、グラフより

$a<2$ のとき 1個

$a=2$ 〃 2個

$a>2$ 〃 3個

II. (1) $f(x)=x^3-7x^2-9$ とおく

$f'(x)=3x^2-14x$

$y=f(x)$ の $x=p$ における接線は

$y-f(p)=f'(p)(x-p)$

$y-(p^3-7p^2-9)=(3p^2-14p)(x-p)$

$\therefore y=(3p^2-14p)x-2p^3+7p^2-9$

これが原点を通るとき

$0=-2p^3+7p^2-9$

$2p^3-7p^2+9=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -7 & 0 & 9 \\ & & -2 & 9 & -9 \\ \hline & 2 & -9 & 9 & 0 \end{array}$$

$(p+1)(2p^2-9p+9)=0$

$$\begin{array}{ll} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{array}$$

$(p+1)(p-3)(2p-3)=0$

$\therefore p=-1,\ \frac{3}{2},\ 3$

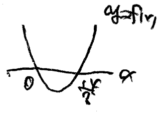
(2) $x^3-7x^2-kx-9=0$

$\Leftrightarrow x^3-7x^2-9=kx$ の実数解は

$y=f(x)$ と $y=kx$ の共有点の x 座標に等しい.

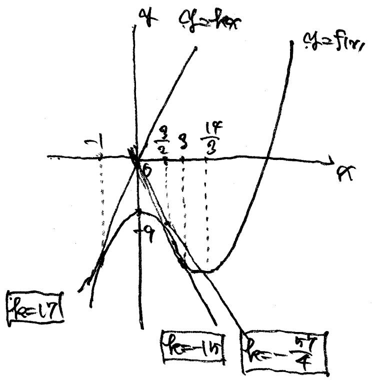
$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ \frac{14}{3}$

x		0		$\frac{14}{3}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=0$ で極大 極大値 $f(0)=-9$

$x=\frac{14}{3}$ 〃 極小 〃 $f(\frac{14}{3})=$



求める範囲は

$-15<k<-\frac{57}{4}$,

$k>17$.

[4].

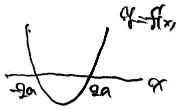
I. (1) $f(x)=x^3-12a^2x+16a$

$f'(x)=3x^2-12a^2$

$=3(x+2a)(x-2a)$

$f'(x)=0$として $x=\pm 2a$

x		$-2a$		$2a$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=-2a$で極大 極大値 $f(-2a)=16a^3+16a$

$x=2a$ 〃 小 〃 小 $f(2a)=-16a^3+16a$

(2) $f(-2a)f(2a)=\underbrace{-16^2a^2(a^2+1)}_{<0}(a^2-1)>0$ すなわち

$a^2-1<0$

$\therefore 0<a<1$ のとき 1個

$f(-2a)f(2a)=0$ すなわち $a=1$ のとき 2個

$f(-2a)f(2a)<0$ 〃 $a>1$ 〃 3個

II. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+a$ とする

$f'(x)=2x^2-2ax$

$=2x(x-a)$

i) $a=0$のとき

$f'(x)\geqq 0$ となり $f(x)$は単調増加より

$f(x)=0$が異なる3個の実数解をもつことはない。

ii) $a\neq 0$のとき

$f'(x)=0$として $x=0, a$

$f(x)$は$x=0$, $x=a$で極値をもつ

$f(x)=0$が異なる3個の実数解をもつとき

$f(0)f(a)<0$

$a\left(-\frac{a^3}{3}+a\right)<0$

$a^2(a^2-3)>0$

$a^2-3>0$ $\therefore a<-\sqrt{3}, a>\sqrt{3}$

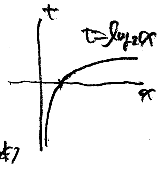
[5].

I. $(\log_2 x)^3-3\log_2 x=k$ …①

$t=\log_2 x$ とおくと 1つのtに対し1つのxが対応する 一対一

$t^3-3t=k$ の実数解は

$y=t^3-3t$ と $y=k$ の共有点の個数に等しい



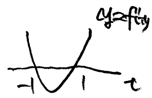
$f(t)=t^3-3t$

$f'(t)=3t^2-3$

$=3(t+1)(t-1)$

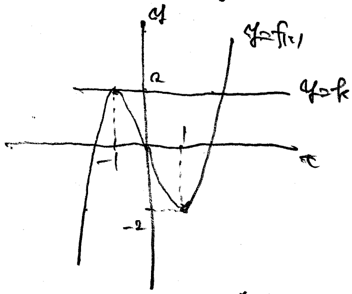
$f'(t)=0$として $t=\pm 1$

t		-1		1	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	極大	↘	極小	↗



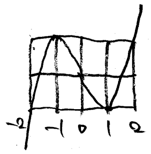
$t=-1$で極大 極大値 $f(-1)=2$

$t=1$ 〃 小 〃 小 $f(1)=-2$



(*)より ①が2つの異なる解をもつとき

$k=2$



このとき

$t=-1, 2$

$t=\log_2 x$ より

$\log_2 x=-1, 2$

$\therefore x=\frac{1}{2}, 4$

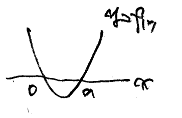
II. (1) $f(x)=x^3-3ax^2+4a$ とおく

$f'(x)=3x^2-3ax$

$=3x(x-a)$

$f'(x)=0$として $x=0, a$

x		0		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



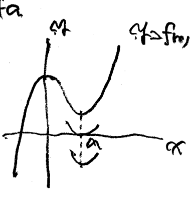
$x=0$で極大 極大値 $f(0)=4a>0$

$x=a$ 〃 小 〃 小 $f(a)=-2a^3+4a$

$f(a)>0$ すなわち

$-2a^3+4a>0$

$a^2-2<0$ $\therefore 0<a<\sqrt{2}$ のとき 1個



$f(a)=0$ すなわち $a=\sqrt{2}$ のとき 2個

$f(a)<0$ 〃 $a>\sqrt{2}$ のとき 3個

(2) $8^x-3a\cdot 4^x+4a=0$ —①

$t=2^x$ とおくと $t>0$. 1つのtに対し1つのxが対応する

$t^3-3at^2+4a=0$.

①の実数解は $t^3-3at^2+4a=0$, $t>0$の実数解の個数に等しいから

$0<a<\sqrt{2}$のとき 0個, $a=\sqrt{2}$のとき 1個, $a>\sqrt{2}$のとき 2個

III. $\cos 3\theta - \cos 2\theta + 3\cos\theta - 1 = a$ (°は省略)

$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - (2\cos^2\theta - 1) + 3\cos\theta - 1 = a$

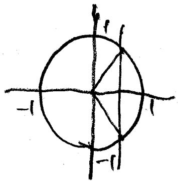
$4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta = a$

$t = \cos\theta$ とおくと $-1 \leqq t \leqq 1$

$t = \pm 1$ のとき 1つのtに対応する θ 1つ

$-1 < t < 1$ 〃 2 〃

が対応する —(*)



$4t^3 - 2t^2 = a$

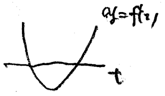
$f(t) = 4t^3 - 2t^2$ とおく

$f'(t) = 12t^2 - 4t$

$\quad = 6t(3t - 1)$

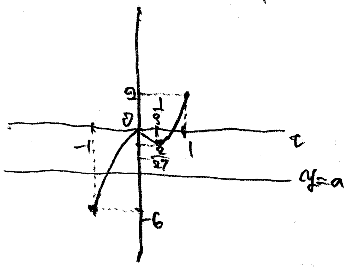
$f'(t) = 0$ として $t = 0, \frac{1}{3}$

t	-1		0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	↗	極大	↘	極小	↗	2



$t = 0$ で極大 極大値 $f(0) = 0$

$t = \frac{1}{3}$ 極小 小 $f(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27}$



(*)より 求めるθの個数は

$a < -6$ のとき 0個

$a = -6$ 〃 1個

$-6 < a < -\frac{2}{27}$ のとき 2個

$a = -\frac{2}{27}$ のとき 4個

$-\frac{2}{27} < a < 0$ のとき 6個

$a = 0$ のとき 4個

$0 < a < 2$ のとき 2個

$a = 2$ のとき 1個

$a > 2$ のとき 0個

6

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$y = f(x)$ の $(a, f(a))$ における接線は

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - (a^3 - 3a) = (3a^2 - 3)(x - a)$

$\therefore y = (3a^2 - 3)x - 2a^3$ …①

(2) これが $(2, 2)$ を通るとき

$2 = 2(3a^2 - 3) - 2a^3$

$a^3 - 3a^2 + 4 = 0$

$(a+1)(a^2 - 4a + 4) = 0$

$(a+1)(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = -1, 2$

$a = -1$ のとき $y = 2$,

$a = 2$ 〃 $y = 9x - 16$

(3) ①が $(2, t)$ を通るとき

$t = 2(3a^2 - 3) - 2a^3$

$-2a^3 + 6a^2 - 6 = t$ …②

接線の本数=接点の個数より

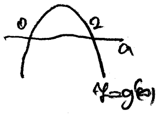
②が3つの異なる実数解をもてばよい

$g(a) = -2a^3 + 6a^2 - 6$ とおく

②の実数解は $y = g(a)$ と $y = t$ の共有点のa座標に等しい

$g'(a) = -6a^2 + 12a$

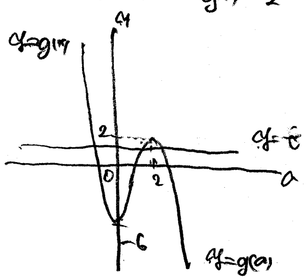
$\quad = -6a(a - 2)$



a		0		2	
$g'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$	↘	極小	↗	極大	↘

$a = 0$ で極小 極小値 $g(0) = -6$

$a = 2$ 大 大 $g(2) = 2$



グラフより 求めるtの範囲は

$-6 < t < 2$

[7]

(1) $x^3-9x \geqq 3x-16$

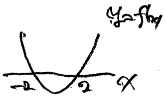
$\Leftrightarrow x^3-12x+16 \geqq 0$

$f(x)=x^3-12x+16$ とおく

$f'(x)=3x^2-12$

$=3(x+2)(x-2)$

x	0		2	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗



$x=2$ で極小かつ最小. 最小値 $f(2)=0 \geqq 0$

よって示された

(2) $\dfrac{x^n-1}{n} > x-1$

$\Leftrightarrow x^n-1 > nx-n$

$\Leftrightarrow x^n-nx+n-1>0$

$f(x)=x^n-nx+n-1$ とおく

$f'(x)=nx^{n-1}-n$

$=n(x^{n-1}-1)$

$f'(x)=0$ として $x=1$

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	$\times$	$+$
$f(x)$		↘	$\times$	↗

$f(1)=0$

よって示された

<point>

1. 不等式の証明

[8]

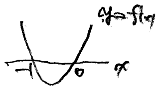
I. $f(x)=2x^3+3x^2+5-a$

$f'(x)=6x^2+6x$

$=6x(x+1)$

$f'(x)=0$ として $x=-1, 0$

x		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=\boxed{0}$ で極小. 極小値 $f(0)=\boxed{5}-a$

$-2 \leqq x \leqq 2$ のとき $f(-2)=1-a$ より

$x=0$ で最小値 $5-a$ をとる

よって題意を満たすとき

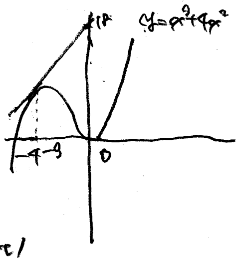
$5-a>0$ 　　$\therefore a<\boxed{5}$

【別解】定数分離

II. (1) $x \leqq 0$ において任意の x で

$y=x^3+4x^2$ のグラフ $\leqq$ $y=ax+18$ のグラフ

となればよい



$f(x)=x^3+4x^2$ とおく

$f'(x)=3x^2+8x$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3+4t^2)=(3t^2+8t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2$

これが $(0, 18)$ を通るとき

$18=-2t^3-4t^2$

$t^3+2t^2+9=0$

$(t+3)(t^2-t+3)=0$

t は実数より $t=-3$

このとき接線は $y=3x+18$

よって

$a \leqq 3$ //

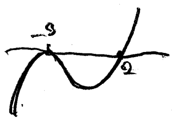
(2) $x^3+4x^2 \leqq 3x+18$

$x^3+4x^2-3x-18 \leqq 0$

$(x+3)(x^2+x-6) \leqq 0$

$(x+3)^2(x-2) \leqq 0$

$\therefore x \leqq 2$



III. $x^3+32 \geqq px^2$

$\Leftrightarrow x^3-px^2+32 \geqq 0$

$f(x)=x^3-px^2+32$ とおく

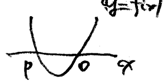
$f'(x)=3x^2-2px$

$=x(3x-2p)$

$p=0$ のとき $f(x)=x^3+32 \geqq 0$ $(x \geqq 0)$

$p<0$ のとき $f'(x)=0$ として $x=0, \frac{2}{3}p$

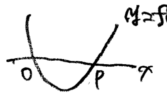
x	0	
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		↗



$f(0)=32>0$ より $f(x)>0$ $(x>0)$

$p>0$ のとき

x	0		$\frac{2}{3}p$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗



$x=\frac{2}{3}p$ で極小かつ最小. 最小値 $f(\frac{2}{3}p)=-\frac{4}{27}p^3+32$

題意を満たすとき

$-\frac{4}{27}p^3+32>0$ 　　$p^3<27 \cdot 8$ 　$(3^3,\ 2^3)$ 　　$\therefore p<6$

以上より $p<6$ //