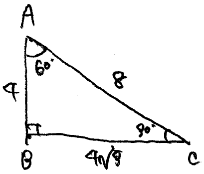
基本問題演習36. 平面ベクトル01

[1]

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 8\cdot\cos 60^\circ$

$=16$



(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=4\sqrt{3}\cdot 8\cdot\cos 150^\circ$ $\left(=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=-48$

<point>

1. ベクトルの内積(定義)

[2]

I. (1) $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\x-1\end{pmatrix}$, $2\vec{a}-3\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\2x+3\end{pmatrix}$

$(\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{a}-3\vec{b})$ のとき $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=0$ より

$-12+(x-1)(2x+3)=0$

$2x^2+x-15=0$

$(x+3)(2x-5)=0$

$\therefore x=-3,\ \frac{5}{2}$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\parallel(2\vec{a}-3\vec{b})$ のとき $2\vec{a}-3\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{b})$ より (k:実数)

$\begin{pmatrix}-4\\2x+3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\x-1\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{cases}-4=3k\ \cdots①\\2x+3=k(x-1)\ \cdots②\end{cases}$

①より $k=-\frac{4}{3}$

②より

$2x+3=-\frac{4}{3}(x-1)$

$3(2x+3)=-4(x-1)$

$10x=-5$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$ より

$2-x=\sqrt{x^2+1}\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}$

$2(2-x)=\sqrt{5(x^2+1)}$

$4(2-x)^2=5(x^2+1),\ 2-x\geqq 0$

$4(x^2-4x+4)=5x^2+5,\ x\leqq 2$

$x^2+16x-11=0,\ x\leqq 2$

$\therefore x=-8-5\sqrt{3}$

II. $\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθ_1

$\vec{b}$と$\vec{c}$ 〃 θ_2とする

$\cos\theta_1=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $\cos\theta_2=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$ より

$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$

$\frac{2x}{2}=\frac{3x+8}{5}$

$5x=3x+8$

$2x=8$ $\therefore x=4$

III. $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおく.

$|\vec{a}|=3\sqrt{5}$ より

$\sqrt{x^2+y^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore x^2+y^2=45$ ―①

$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より

$-x+2y=0$ $\therefore x=2y$ ―②

①,②より

$5y^2=45$

$y^2=9$ $\therefore y=\pm 3$

よって

$\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$

<point>

1. ベクトルの内積(成分表示)
2. 直交条件

[3]

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3\cdot\cos 30^\circ$ $\left(=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $=\boxed{3\sqrt{3}}$

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})=3|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$

$=12-3\sqrt{3}-18=\boxed{-6-3\sqrt{3}}$

$|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2$

$=4-18+27=13$

$|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}|\geqq 0$ より

$|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}|=\boxed{\sqrt{13}}$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ より

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=13$

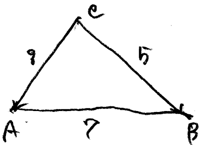
$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$ $\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $\theta=150^\circ$

(3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ より



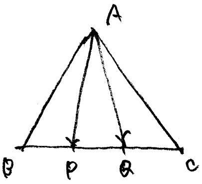
$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|^2$

$|\overrightarrow{CB}|^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+|\overrightarrow{CA}|^2=49$

$2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-15$

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{15}{2}$ //

(4) $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{18}$ //

<point>

1. 内積の性質(計算)

[4]

(1) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=10t^2-18t+25$

$=10\left(t-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{169}{10}$

$t=\frac{9}{10}$のとき 最小で

$|\vec{a}+t\vec{b}|$の最小値は $\frac{13\sqrt{10}}{10}$

このとき

$\left(\vec{a}+\frac{9}{10}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{9}{10}|\vec{b}|^2$

$=-9+9=0$

より $\theta=\boxed{\frac{\pi}{2}}$

(2) $|\vec{p}|^2=|(1-t)\vec{a}+t\vec{b}|^2$

$=(1-t)^2|\vec{a}|^2+2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=2(1-t)^2+2t(1-t)+5t^2$

$=5t^2-2t+2$

$=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$

最大値 5 $(t=1)$

最小値 $\frac{9}{5}$ $\left(t=\frac{1}{5}\right)$ //

[5]

(1) $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{7}$ より

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=7$

$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=7$

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=18$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\frac{9}{2}}$

(2) △OABの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 4-\frac{9^2}{4}}$

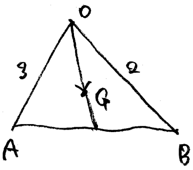
$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3^2\cdot 4^2-9^2}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt{7}}{4}}$

<point>

1. 三角形の面積(ベクトル利用)

[6]

I (1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=\boxed{3}$



$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=3+1=\boxed{4}$

(2) $|\overrightarrow{OG}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right|^2$

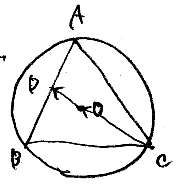
$=\frac{1}{9}\left(|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2\right)$

$=\frac{19}{9}$

$\therefore |\overrightarrow{OG}|=\boxed{\frac{\sqrt{19}}{3}}$

(3) $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OG}|}=\frac{4}{\sqrt{19}}=\boxed{\frac{4\sqrt{19}}{19}}$

II (1) $2\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ より



$2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO})+4(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO})-5\overrightarrow{CO}=\vec{0}$

$11\overrightarrow{CO}=2\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CO}=\frac{6}{11}\underbrace{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)}_{\overrightarrow{CD}}$

$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ より $AD:DB=2:1$

よって

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ //

2) $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{OD}{OC} = \dfrac{5}{6}$

3) $2\vec{OA} + 4\vec{OB} + 5\vec{OC} = \vec{0}$ より

$$2\vec{OA} + 4\vec{OB} = -5\vec{OC}$$

$$|2\vec{OA} + 4\vec{OB}| = |-5\vec{OC}| = 5$$

$$|\vec{OA} + 2\vec{OB}| = \frac{5}{2}$$

$$|\vec{OA}|^2 + 4\vec{OA}\cdot\vec{OB} + 4|\vec{OB}|^2 = \frac{25}{4}$$

$$\therefore \vec{OA}\cdot\vec{OB} = \frac{5}{16}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|} = \frac{5}{16}$$

<point>

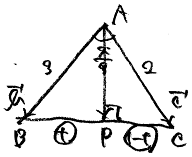
1. 計算

[7]

I. BP:PC $= t : 1-t$ とおくと

$$\vec{AP} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

$\vec{AP} \perp \vec{BC}$ であるから $\vec{AP}\cdot\vec{BC} = 0$ より



$$\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}\cdot(\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$(t-1)|\vec{b}|^2 + (1-2t)\vec{b}\cdot\vec{c} + t|\vec{c}|^2 = 0$$

$$9(t-1) + 3(1-2t) + 4t = 0$$

$$7t - 6 = 0 \quad \therefore t = \frac{6}{7}$$

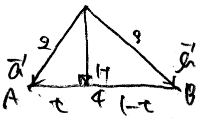
よって

$$\vec{AP} = \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{6}{7}\vec{c}$$

II. AH:HB $= t : 1-t$ とおくと

$$\vec{OH} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

$\vec{OH} \perp \vec{AB}$ であるから $\vec{OH}\cdot\vec{AB} = 0$ より



$$\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$(t-1)|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$$

ここで $|\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = 4$ より

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 16$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 16$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = -3 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{3}{2}$$

よって

$$4(t-1) - \frac{3}{2}(1-2t) + 9t = 0$$

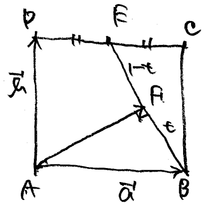
$$16t = \frac{11}{2}$$

$$\therefore t = \frac{11}{32}$$

したがって

$$\vec{OH} = \frac{21}{32}\vec{a} + \frac{11}{32}\vec{b}$$

III 1) BF:FE $= t : 1-t$ とすると



$$\vec{AF} = (1-t)\vec{a} + t\vec{AE}$$

$$= (1-t)\vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{a} + t\vec{b}$$

$\vec{AF} \perp \vec{BE}$ であるから $\vec{AF}\cdot\vec{BE} = 0$ より

$$\left\{\left(1-\frac{t}{2}\right)\vec{a} + t\vec{b}\right\}\cdot\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - 1\right)|\vec{a}|^2 + (1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\frac{t}{4} - \frac{1}{2} + t = 0$$

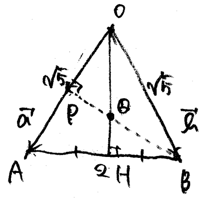
$$\frac{5}{4}t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \frac{2}{5}$$

よって

$$\vec{AF} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

[8]

I. 1) $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ より



とする

$$|\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{AB}| = 2$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 4$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 4$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 3$$

2) $\vec{OP} = |\vec{b}|\cos\theta \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ （単位ベクトル）

$$= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \quad (\text{正射影ベクトル})$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a}$$

3) メネラウスの定理より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{OQ}{QH} = 1 \quad \therefore \frac{OQ}{QH} = \frac{3}{1}$$

よって

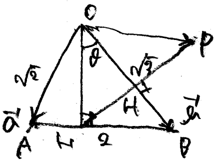
$$\vec{OQ} = \frac{3}{4}\vec{OH}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\vec{OA} + \frac{3}{8}\vec{OB}$$

II.

(1) $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ より



$|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{AB}|=2$

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=4$

$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=4$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

AL : LB = t : 1−t とおくと

$\vec{OL}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{OL}\perp\vec{AB}$ であるから $\vec{OL}\cdot\vec{AB}=0$ より

$\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$(t-1)|\vec{a}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$2(t-1)+\frac{1}{2}(1-2t)+3t=0$

$4t=\frac{3}{2}$　∴ $t=\frac{3}{8}$

よって

$\vec{OL}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$ //

(2) 図のようにHとθをおく

$\vec{OH}=|\vec{OL}|\cos\theta\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$=\frac{\vec{b}\cdot\vec{OL}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

ここで

$\vec{b}\cdot\vec{OL}=\vec{b}\cdot\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)$

$=\frac{5}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{3}{8}|\vec{b}|^2$

$=\frac{5}{16}+\frac{9}{8}=\frac{23}{16}$

より

$\vec{OH}=\frac{23}{48}\vec{b}$

よって

$\vec{OP}=\vec{OL}+2\vec{LH}$

$=\vec{OL}+2(\vec{OH}-\vec{OL})$

$=2\vec{OH}-\vec{OL}$

$=\frac{23}{24}\vec{b}-\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)$

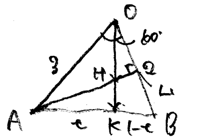
$=-\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{7}{12}\vec{b}$ //

<point>

1. 正射影ベクトル

[9].

(1) AK : KL = t : 1−t とおくと



とする

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=3$

$\vec{OK}=(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}$

$\vec{OK}\perp\vec{AB}$ であるから $\vec{OK}\cdot\vec{AB}=0$ より

$\{(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}\}\cdot(\vec{OB}-\vec{OA})=0$

$(t-1)|\vec{OA}|^2+(1-2t)\vec{OA}\cdot\vec{OB}+t|\vec{OB}|^2=0$

$9(t-1)+3(1-2t)+4t=0$

$7t-6=0$　∴ $t=\frac{6}{7}$

よって

$\vec{OK}=\frac{1}{7}\vec{OA}+\frac{6}{7}\vec{OB}$

O, H, K は同一直線上にあるから

$\vec{OH}=k\vec{OK}$ (k : 実数)　　$\vec{AH}=\vec{OH}-\vec{OA}$

$=\frac{k}{7}\vec{OA}+\frac{6}{7}k\vec{OB}$　　$=\left(\frac{k}{7}-1\right)\vec{OA}+\frac{6}{7}k\vec{OB}$

$\vec{AH}\perp\vec{OB}$ であるから $\vec{AH}\cdot\vec{OB}=0$ より

$\left\{\left(\frac{k}{7}-1\right)\vec{OA}+\frac{6}{7}k\vec{OB}\right\}\cdot\vec{OB}=0$

$\left(\frac{k}{7}-1\right)\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\frac{6}{7}k|\vec{OB}|^2=0$

$3\left(\frac{k}{7}-1\right)+\frac{24}{7}k=0$

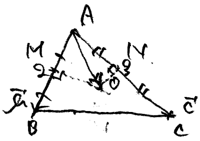
$\frac{27}{7}k=3$　∴ $k=\frac{7}{9}$

よって

$\vec{OH}=\frac{1}{9}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OB}$ //

外心：各辺の垂直二等分線の交点

(2) $\vec{AO}=k\vec{b}+l\vec{c}$ (k, l : 実数) とおく



とする

$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

$\vec{OM}=\vec{AM}-\vec{AO}=\left(\frac{1}{2}-k\right)\vec{b}-l\vec{c}$

$\vec{ON}=\vec{AN}-\vec{AO}=-k\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-l\right)\vec{c}$

$\vec{OM}\perp\vec{AB}$ であるから $\vec{OM}\cdot\vec{AB}=0$ より

$\left\{\left(\frac{1}{2}-k\right)\vec{b}-l\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=0$

$\left(\frac{1}{2}-k\right)|\vec{b}|^2-l\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$4\left(\frac{1}{2}-k\right)-3l=0$　∴ $4k+3l=2$ −①

$\vec{ON}\perp\vec{AC}$ であるから $\vec{ON}\cdot\vec{AC}=0$ より

$\left\{-k\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-l\right)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=0$

$-k\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(\frac{1}{2}-l\right)|\vec{c}|^2=0$

$-3k+9\left(\frac{1}{2}-l\right)=0$　∴ $k+3l=\frac{3}{2}$ −②

①, ② より

$k=\frac{1}{6}$, $l=\frac{4}{9}$

よって

$\vec{AO}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$ //

10

I. (1) $\vec{BC}\cdot\vec{BA}=\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ より

$\vec{BC}\cdot\vec{BA}+\vec{BC}\cdot\vec{CA}=0$

$\vec{BC}\cdot(\vec{BA}+\vec{CA})=0$

$(\vec{AC}-\vec{AB})\cdot(\vec{AC}+\vec{AB})=0$

$|\vec{AC}|^2-|\vec{AB}|^2=0$

$\therefore |\vec{AC}|=|\vec{AB}|$

△ABCは AB=AC の二等辺三角形 //

(2) P(A)P(B)=P(C)P(A) より

P(A)(P(B)−P(C))=0

∴ P(A)=0 or P(B)=P(C)

P(A)=0のとき

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$

$\vec{AB},\vec{AC}\neq\vec{0}$ より $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

よって△ABCは∠A=90°の直角三角形

したがって△ABCは

∠A=90°の直角三角形 または

AB=ACの二等辺三角形 //

II. $\begin{cases}\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\vec{CD}\cdot\vec{DA} \cdots ① \\ \vec{DA}\cdot\vec{AB}=\vec{BC}\cdot\vec{CD} \cdots ②\end{cases}$

①+② より

$\vec{AB}\cdot(\vec{BC}+\vec{DA})=\vec{CD}\cdot(\vec{BC}+\vec{DA})$

$(\vec{BC}+\vec{DA})\cdot(\vec{AB}-\vec{CD})=0$

$(-\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AD})\cdot(\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AD})=0 \cdots ①$

$(\vec{DC}-\vec{AB})\cdot(\vec{DC}+\vec{AB})=0$

$|\vec{DC}|^2-|\vec{AB}|^2=0$

$\therefore |\vec{DC}|=|\vec{AB}|$

①−② より

$\vec{AB}\cdot(\vec{BC}-\vec{DA})=\vec{CD}\cdot(\vec{DA}-\vec{BC})$

$(\vec{BC}-\vec{DA})\cdot(\vec{AB}+\vec{CD})=0$

$(-\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD})\cdot(\vec{AB}-\vec{AC}+\vec{AD})=0$

$(\vec{AD}+\vec{BC})\cdot(\vec{AD}-\vec{BC})=0$

$|\vec{AD}|^2-|\vec{BC}|^2=0$

$\therefore |\vec{AD}|=|\vec{BC}|$ □

<point>

1. 三角形の形状問題