基本問題演習30、微分法(2)

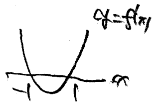
1

(1) $f(x)=x^3-3x+1$ とおく

$f'(x)=3x^2-3$

$=3(x+1)(x-1)$

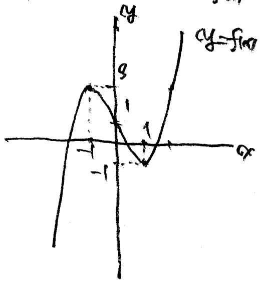
$f'(x)=0$ として $x=\pm1$



x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=-1$で極大　極大値 $f(-1)=3$

$x=1$　〃　〃　$f(1)=-1$



(2) $f(x)=3x^3-6x^2-3x$

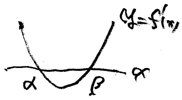
$f'(x)=9x^2-12x-3=3(3x^2-4x-1)$

$f'(x)=0$ として

$3x^2-4x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおく

x		α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=\alpha$で極大

$$\begin{array}{r} x-\frac{2}{3} \\ 3x^2-4x-1\,\big)\,3x^3-6x^2-3x \\ 3x^3-4x^2-x \\ \hline -2x^2-2x \\ -2x^2+\frac{8}{3}x+\frac{2}{3} \\ \hline -\frac{14}{3}x-\frac{2}{3} \end{array}$$

$f(x)=(3x^2-4x-1)(x-\frac{2}{3})-\frac{14}{3}x-\frac{2}{3}$

極大値 $f(\alpha)=-\frac{14}{3}\alpha-\frac{2}{3}$

$=-\frac{14}{3}\cdot\frac{2-\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}$

$=\dfrac{-34+14\sqrt{7}}{9}$ //

<point>

1、関数の増減、極値、グラフ

2

(1) $f'(a)=0\to f(a)$が極値であるが偽の反例

$f(x)=x^3$ は $x=0$ で $f'(x)=0$ であるが、

$f(0)$は極値ではない //

(2) $f(x)=x^3+ax^2-2x+1$

$f'(x)=3x^2+2ax-2$

$x=-2$で極値をもつとき

$f'(-2)=0$ であることが必要

$-4a+10=0$　$\therefore a=\frac{5}{2}$

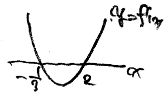
逆にこのとき

$f'(x)=3x^2+5x-2$　　$3x^2$

$=(x+2)(3x-1)$

$f'(x)=0$ として $x=-2,\frac{1}{3}$

x		-2		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=-2$で極値をもつから $a=\frac{5}{2}$

$x=\frac{1}{3}$のとき極小　極小値 $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}+\frac{5}{18}-\frac{2}{3}+1$

$=\dfrac{2+15+18}{54}=\dfrac{35}{54}$ //

(3) $f(x)=-x^3+ax+b$ とおく

$f'(x)=-3x^2+a$

$a<0$のとき $f'(x)<0$となり $f(x)$は単調減少となるから

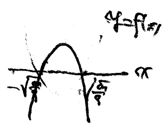
極値をもたないので不適

よって $a\geqq0$

このとき

$f'(x)=0$ として $x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$

x		$-\sqrt{\frac{a}{3}}$		$\sqrt{\frac{a}{3}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘



$x=-\sqrt{\frac{a}{3}}$で極小　極小値 $f(-\sqrt{\frac{a}{3}})=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b=1$ ―①

$x=\sqrt{\frac{a}{3}}$　大　大　$f(\sqrt{\frac{a}{3}})=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b=\frac{3}{2}$ ―②

①+②より

$2b=\frac{5}{2}$　$\therefore b=\boxed{\frac{5}{4}}$

②より

$\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}=\frac{1}{4}$

$a\sqrt{a}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$　$a^3=\frac{27}{64}$　$\therefore a=\boxed{\frac{3}{4}}$

<point>

1、極値

[3]

(1) $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$

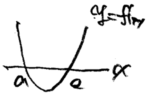
$f'(x)=6x^2-6(a+2)x+12a$

$=6(x-2)(x-a)$

$f'(x)=0$が異なる2実解をもたなければよいから $a=2$

(2) i) $a<2$のとき

x		a		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=a$で極大 極大値 $f(a)=-a^3+6a^2$

ii) $a>2$のとき

x		2		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=2$で極大 極大値 $f(2)=12a-8$

(3) i) $a<2$のとき

$-a^3+6a^2=32$として

$a^3-6a^2+32=0$

$(a+2)(a-4)^2=0$

$a<2$より $a=-2$

-2	1	-6	0	32
		-2	16	-32
	1	-8	16	0

ii) $a>2$のとき

$12a-8=32$として $a=\frac{10}{3}$

i), ii)より

$a=-2,\ \frac{10}{3}$

[4]

I. (1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+4(a^2-9)x+1$

$f'(x)=x^2-2ax+4a^2-36$

$f'(x)=0$が異なる2実解をもてばよいから

判別式をDとして$D>0$より

$D/4=a^2-(4a^2-36)$

$=-3a^2+36>0$

$a^2<12$ $\therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

(2) $f'(x)=0$が$x>0$で異なる2実解をもてばよいから

$f'(x)=0$の2解をα,βとして

$$\begin{cases} D>0 & \therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3} \\ \alpha+\beta>0 : 2a>0 & \therefore a>0 \\ \alpha\beta<0 : 4a^2-36<0 & \therefore -3<a<3 \end{cases}$$

$\therefore 0<a<3$

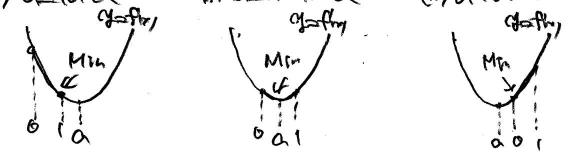
II. $f(x)=x^3-3ax^2+3x+1$

$f'(x)=3x^2-6ax+3=3(x-a)^2-3a^2+3$

$0\leqq x\leqq 1$で$f'(x)\geqq 0$となればよいから

$\boxed{\text{最小値}}$ →

i) $a\geqq 1$のとき　ii) $0\leqq a<1$のとき　iii) $a<0$のとき



i) $f'(1)=6-6a\geqq 0$ $\therefore a\leqq 1$ 　$a\geqq 1$より $a=1$

ii) $f'(a)=-3a^2+3\geqq 0$ $\therefore -1\leqq a\leqq 1$ 　$\therefore 0\leqq a<1$

iii) $f'(0)=3\geqq 0$ 常に成立 　$\therefore a<0$

i)〜iii)より

$a\leqq 1$

[5]

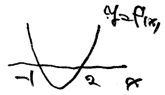
(1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$として $x=-1,2$

x		-1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=-1$で極大 極大値 $f(-1)=8$ 　$a=-1,\ b=2$

$x=2$ 〃 〃 $f(2)=-19$ 　$f(a)=8,\ f(b)=-19$

(2) $y=f(x)$と直線PQ: $y=-9x-1$の共有点は

$2x^3-3x^2-12x+1=-9x-1$

$2x^3-3x^2-3x+2=0$

$(x+1)(x-2)(2x-1)=0$ 　$\therefore x=\underset{P}{-1},\ \underset{Q}{2},\ \frac{1}{2}$

よって題意は示された。 　$f(\frac{1}{2})=-\frac{11}{2}$を示してもよい

(3) Mを通る直線は

$y+\frac{11}{2}=m(x-\frac{1}{2})$

$\therefore y=mx-\frac{m}{2}-\frac{11}{2}$

$\frac{1}{2}$	2	-3	$-m-12$	$\frac{m}{2}+\frac{13}{2}$
		1	-1	$-\frac{m}{2}-\frac{13}{2}$
	2	-2	$-m-13$	0

これと$y=f(x)$の共有点のx座標は

$2x^3-3x^2-12x+1=mx-\frac{m}{2}-\frac{11}{2}$

$2x^3-3x^2-(m+12)x+\frac{m}{2}+\frac{13}{2}=0$

$(2x-1)(x^2-x-\frac{m+13}{2})=0$

$x^2-x-\frac{m+13}{2}=0$が異なる2解をもつとき

これらをα,βとすると$R(\alpha,f(\alpha)),\ S(\beta,f(\beta))$とし

$\alpha+\beta=1$ 　$\therefore \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$

よって題意に示された

<point>

1. グラフに対応の文字は注

$\boxed{6}$

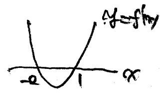
$f(x)=2x^3+3x^2-12x \quad (-3\leqq x\leqq 3)$

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ として $x=-2, 1$

x	-3		-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	



$x=-2$ で極大 極大値 $f(-2)=20$

$x=1$ 〃 〃 $f(1)=-7$

$f(-3)=9,\ f(3)=45$ より

最大値 45 $(x=3)$

〃 -7 $(x=1)$ 〃

$\boxed{7}$

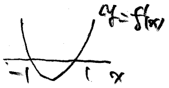
I(1) $f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3$

$=3(x+1)(x-1)$

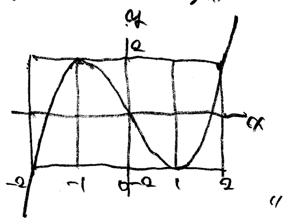
$f'(x)=0$ として $x=\pm 1$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$



$x=-1$ で極大 極大値 $f(-1)=2$

$x=1$ 〃 〃 $f(1)=-2$



〃

(2) $f(a)=f(a+1)$ より

$a^3-3a=(a+1)^3-3(a+1)$

$3a^2+3a+1-3=0$

$3a^2+3a-2=0$

$\therefore a=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$ 〃

(3) i) $a<\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$ のとき $m(a)=f(a)=a^3-3a$

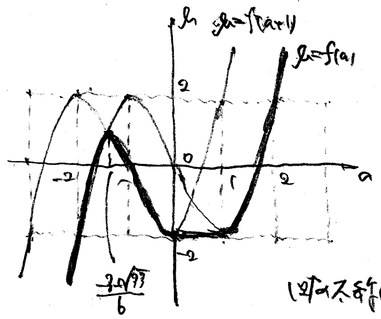
ii) $a=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$ 〃 $m(a)=f(a)=f(a+1)=a^3-3a$

iii) $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}<a<0$ 〃 $m(a)=f(a+1)=(a+1)^3-3(a+1)$

iv) $0\leqq a\leqq 1$ 〃 $m(a)=f(1)=-2$

v) $a>1$ 〃 $m(a)=f(a)=a^3-3a$ 〃

(4)



図の太線部分 〃

II. $f(x)=-x^3+3ax$

$f'(x)=-3x^2+3a$

$=-3(x^2-a)$

i) $a\leqq 0$ のとき

$f'(x)\leqq 0$ より $f(x)$ は単調減少より

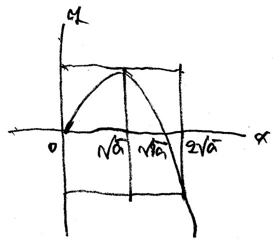
最大値 $f(0)=0$

〃 $f(1)=3a-1$

ii) $a>0$ のとき

x	0		$\sqrt{a}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$\boxed{\text{最大値}}$



i) $\sqrt{a}\geqq 1$ すなわち $a\geqq 1$ のとき $f(1)=3a-1$

ii) $0<a\leqq 1$ のとき $f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}$

$\boxed{\text{最小値}}$

i) $\sqrt{3a}\leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\frac{1}{3}$ のとき $f(0)=0$

$a>\frac{1}{3}$ のとき $f(1)=3a-1$ 〃

III. $f(x)=3ax^2-2x^3$

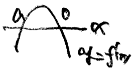
$f'(x)=-6x^2+6ax$

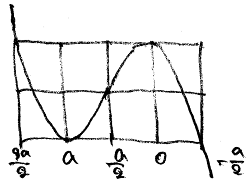
$=-6x(x-a)$

$f'(x)=0$として $x=0, a$

i) $-1<a<0$のとき

x	-1		a		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	





$\boxed{\text{最大値}}$

i) $-1<\frac{3a}{2}$ すなわち $-\frac{2}{3}<a<0$のとき $f(-1)=3a+2$

ii) $-1<a\leqq-\frac{2}{3}$のとき $f(0)=0$

$\boxed{\text{最小値}}$

$f(1)=3a-2$

ii) $a=0$のとき

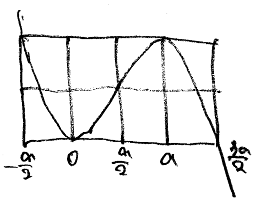
$f'(x)=-6x^2\leqq0$ であるから

$f(x)$は単調減少より

最大値 $f(-1)=3a+2=2$

最小値 $f(1)=3a-2=-2$

iii) $0<a<1$のとき



$\boxed{\text{最大値}}$

$f(-1)=3a+2$

$\boxed{\text{最小値}}$

i) $\frac{3a}{2}\leqq1$ すなわち $0<a\leqq\frac{2}{3}$のとき $f(0)=0$

ii) $\frac{2}{3}<a<1$のとき $f(1)=3a-2$ //

〈point〉

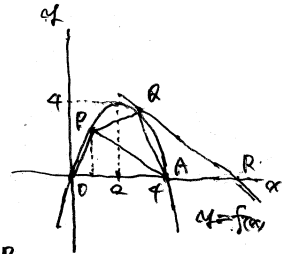
1. 3次関数の最大・最小

$\boxed{8}$

(1) $f(x)=-x^2+4x$ とおく

$=-x(x-4)$

$f'(x)=-2x+4$



APの傾きは $\frac{0-(-p^2+4p)}{4-p}$

$=\frac{-p(4-p)}{4-p}=-p$

ℓの接点のx座標を $x=t$ とすると

$f'(t)=-p$

$-2t+4=-p$

$\therefore t=\frac{p+4}{2}=\alpha$

より

$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

$y-(-\alpha^2+4\alpha)=(-2\alpha+4)(x-\alpha)$

$\therefore y=(-2\alpha+4)x+\alpha^2$

$\therefore y=-px+\frac{(p+4)^2}{4}$ //

(2) ℓとx軸との交点をRとすると

Rのx座標は

$x=\frac{(p+4)^2}{4p}$

よって凹形OAQRの面積は

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(p+4)^2}{4\cancel{p}}\cdot\{-\cancel{p}(p-4)\}=-\frac{1}{8}(p+4)^2(p-4)$ //

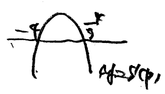
(3) $S(p)=-\frac{1}{8}(p+4)^2(p-4)$　　$(p^2-16)(p+4)$

$=-\frac{1}{8}(p^3+4p^2-16p-64)$

$S'(p)=-\frac{1}{8}(3p^2+8p-16)$　　$\begin{matrix}3 & 4\\ 1 & -4\end{matrix}$

$=-\frac{1}{8}(p+4)(3p-4)$

$S'(p)=0$として $p=\frac{4}{3}$



p	0		$\frac{4}{3}$		4
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		↗	極大	↘	

$p=\frac{4}{3}$のとき極大かつ最大

最大値 $S(\frac{4}{3})=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3}\cdot(\frac{16}{3})^2=\frac{256}{27}$ //

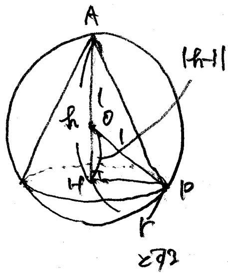
4

(1) △OHPで三平方の定理より

$r=\sqrt{1-(h-1)^2}$

$=\sqrt{-h^2+2h}$ //

$(0<h<2)$



(2) $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$

$=\pi\sqrt{r^4+h^2r^2}$

$=\pi\sqrt{(-h^2+2h)^2+h^2(-h^2+2h)}$

$=\pi\sqrt{-2h^3+4h^2}$ //

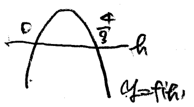
(3) $f(h)=-2h^3+4h^2$ $(0<h<2)$ とおく

$f'(h)=-6h^2+8h$

$=-2h(3h-4)$

$f'(h)=0$ として $h=\frac{4}{3}$

h	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		↗	$\frac{64}{27}$	↘	



$h=\frac{4}{3}$ のとき極大かつ最大

このとき

$r=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$S=\pi\cdot\frac{4}{3}\sqrt{-2\cdot\frac{4}{3}+4}=\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$ //