

高2数学 基本問題演習 31. 微分法(3)

1 [2018 公立鳥取環境大]

3次方程式 $x^3 + 2x^2 + 2x - 2 = 0$ の実数解がただ1つであり、その実数解 $x = a$ が $-0.5 < a < 1$ であることを示せ。

2 [I. 2014 東京理科大 II. 2005 島根大]

I. k を定数として、3次方程式 $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - k = 0$ ……(*) を考える。

(1) この方程式が、異なる3つの実数解をもつような k の値の範囲は

$$-\overset{ア}{\boxed{}} < k < \frac{\overset{イ}{\boxed{}}}{\overset{ウ}{\boxed{}}} \text{ ……(**) である。}$$

(2) k が(**)の範囲にあるとき、方程式(*)の3つの解を α, β, γ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$) とおく。

(a) k が(**)の範囲を動くとき、 α, β, γ のとりうる値の範囲は、それぞれ

$$-\overset{エ}{\frac{\boxed{}}{\overset{オ}{\boxed{}}}} < \alpha < -\overset{カ}{\boxed{}}, \quad -\overset{キ}{\boxed{}} < \beta < \overset{ク}{\boxed{}}, \quad \overset{ケ}{\boxed{}} < \gamma < \frac{\overset{コ}{\boxed{}}}{\overset{サ}{\boxed{}}}$$

である。

(b) k が(**)の範囲を動くとき、 α と γ の積 $\alpha\gamma$ が最小となるのは

$$k = -\frac{\overset{シ}{\boxed{}}}{\overset{ス}{\boxed{}}} \text{ のときであって、} \alpha\gamma \text{ の最小値は } -\frac{\overset{セ}{\boxed{}}}{\overset{ソ}{\boxed{}}} \text{ である。}$$

II. $f(x) = x^3 - 3x^2$ とするとき

(1) $f(x)$ の増減を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) $a \geq 0$ とする。方程式 $|f(x)| = a$ の異なる実数解の個数を調べよ。

3 [2002 愛知教育大 2004 近畿大]

I. 方程式 $x^3 - 3ax + 4\sqrt{2} = 0$ (a は定数) について、異なる実数解の個数を調べよ。

高2数学 基本問題演習 31. 微分法(3)

Ⅱ. $y = x^3 - 7x^2 - 9$ で表される曲線を C とする. このとき

(1) 点 $(p, p^3 - 7p^2 - 9)$ における C の接線の方程式は

$$y = \left(\overset{ア}{\square} p^2 - \overset{イ}{\square} p \right) x - \overset{ウ}{\square} p^3 + \overset{エ}{\square} p^2 - \overset{オ}{\square}$$

が原点を通るのは, p の値が (小さい順に) $\overset{カ}{\square}$, $\overset{キ}{\square}$, $\overset{ク}{\square}$ のときである.

(2) 3次方程式 $x^3 - 7x^2 - kx - 9 = 0$ が3個の異なる実数解をもつのは, 定数 k の値の範囲が

$$\overset{ケ}{\square} < k < \overset{コ}{\square}, \quad \overset{サ}{\square} < k$$

のときである.

4 [Ⅰ. 2016 中央大 Ⅱ. 2015 東京都市大]

Ⅰ. a を正の定数とする. 3次関数 $f(x) = x^3 - 12a^2x + 16a$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ.

(2) 3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数を, a の値により場合分けして求めよ.

Ⅱ. 3次方程式 $\frac{2}{3}x^3 - ax^2 + a = 0$ が異なる3個の実数解をもつとき, 実数の定数 a の値

の範囲は \square である.

5 [Ⅰ. 2007 関西学院大 Ⅱ. 1997 慶応義塾大 Ⅲ. 2002 京都大]

Ⅰ. k を正の定数とする. 方程式 $(\log_2 x)^3 - 3\log_2 x = k$ がちょうど2つの異なる解をも

つとき, $k = \overset{ア}{\square}$ で, そのときの解は $x = \overset{イ}{\square}$, $\overset{ウ}{\square}$ である. ただし,

$\overset{イ}{\square} < \overset{ウ}{\square}$ とする.

Ⅱ. a を正数とする.

(1) 方程式 $x^3 - 3ax^2 + 4a = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ.

(2) 方程式 $8^x - 3a4^x + 4a = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ.

Ⅲ. $0 \leq \theta < 360$ とし, a は定数とする. $\cos 3\theta - \cos 2\theta + 3\cos \theta - 1 = a$ を満たす θ の値はいくつあるか. a の値によって分類せよ.

高2数学 基本問題演習 31. 微分法(3)

6 [2012 岩手大]

$f(x) = x^3 - 3x$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の接線のうち、点 $(2, 2)$ を通るものの方程式をすべて求めよ。
- (3) 点 $(2, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に3本の接線が引けるとき、 t の値の範囲を求めよ。

7 [(1) 2011 水産大学校 (2) 2005 山口大]

- (1) $x > 0$ のとき、 $x^3 - 9x \geq 3x - 16$ が成立することを証明せよ。
- (2) n を1より大きい自然数とする。このとき、 $x > 0$ 、 $x \neq 1$ に対して、不等式 $\frac{x^n - 1}{n} > x - 1$ が成り立つことを示せ。

8 [I. 2001 東京経済大 II. 2009 岡山大 III. 2010 慶応義塾大]

I. 関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5 - a$ は、 $x = \text{ア}$ のときに極小値 イ $- a$ をとる。
ただし a は定数である。

また、不等式 $2x^3 + 3x^2 + 5 - a > 0$ が、 $-2 \leq x \leq 2$ の範囲で成り立つとき、 $a < \text{ウ}$ である。

II. (1) a を実数とする。 $x \leq 0$ において、常に $x^3 + 4x^2 \leq ax + 18$ が成り立っているものとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) で求めた範囲にある a のうち、最大のものを a_0 とするとき、不等式 $x^3 + 4x^2 \leq a_0x + 18$ を解け。

III. $x \geq 0$ のとき、 $x^3 + 32 \geq px^2$ が成り立つような定数 p の最大値は である。