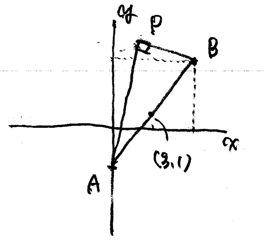
基本問題演習27. 軌跡と領域(1)

[1]

PはABを直径とする円周上を動くから



$(x-3)^2+(y-1)^2=5^2$

$x^2+y^2-\boxed{6}x-\boxed{2}y-\boxed{15}=0$

[別解]

AP⊥BPであるから $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ より　$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}x\\y+3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}x-6\\y-5\end{pmatrix}$

$x(x-6)+(y+3)(y-5)=0$

$\therefore x^2+y^2-\boxed{6}x-\boxed{2}y-\boxed{15}=0$

<point>

1. 軌跡.

[2]

(1) P(x, y)とする

OP=APより

$OP^2=AP^2$

$x^2+y^2=(x-3)^2+y^2$

$-6x+9=0$　$\therefore \boxed{x=\frac{3}{2}}$

[別解]

Pの軌跡はOAの垂直二等分線より $x=\frac{3}{2}$

(2) P(x, y)とする

AP=2OPより

$AP^2=4OP^2$

$(x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$

$3x^2+3y^2+6x-9=0$

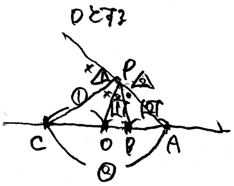
$x^2+y^2+2x-3=0$

$\boxed{(x+1)^2+y^2=4}$

[別解] アポロニウスの円

OAを1:2に内分・外分する点をそれぞれB, Cとする

図のようにPをとると



角の二等分線の定理の逆より

PBは∠OPAの

PCは∠OPDの二等分線となるから

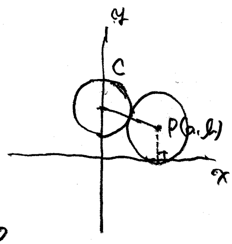
∠BPC=90°

よってPはBCを直径とする円を描く

すなわち

$\boxed{(x-1)^2+y^2=4}$

(2) 題意より $h>0$



Pを中心とする円の半径は h

これがCに外接するから

$\sqrt{a^2+(h-2)^2}=h+1$

$a^2+(h-2)^2=(h+1)^2$, $h+1\geqq 0$

$a^2-6h+3=0$, $h\geqq -1$

$\therefore h=\frac{a^2}{6}+\frac{1}{2}$ (放物線)

[3]

(1) $y=x^2+4x-4-4a(x-1)$

$=x^2-4(a-1)x+4a-4$

$=\{x-2(a-1)\}^2-4(a-1)^2+4a-4$

$=\{x-2(a-1)\}^2-4a^2+12a-8$

$\therefore (x, y)=(2(a-1), -4a^2+12a-8)$

(2) $\begin{cases} x=2(a-1) & \cdots ① \\ y=-4a^2+12a-8 & \cdots ② \end{cases}$

①より

$a=\frac{x}{2}+1$

②より

$y=-4\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+12\left(\frac{x}{2}+1\right)-8$

$=-x^2+2x$

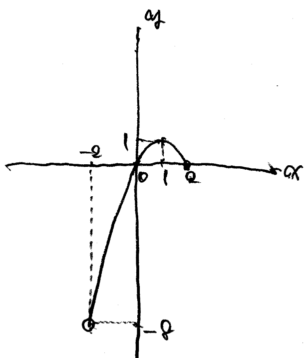
$0<a\leqq 2$ より

$0<\frac{x}{2}+1\leqq 2$

$-1<\frac{x}{2}\leqq 1$　$\therefore -2<x\leqq 2$

よって $y=-x^2+2x$ の $-2<x\leqq 2$ の部分

(3)



<point>

1. 媒介変数表示と軌跡.

II. $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$

$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2-4k^2-(3k-1)^2+14k^2-8k+1=0$

$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2=-k^2+2k$

これが円を表すとき

$-k^2+2k>0$

$k(k-2)<0$　∴ $0<k<2$

このとき円の中心を(x, y)とすると

$\begin{cases} x=2k & —① \\ y=-3k+1 & —② \end{cases}$

①より $k=\frac{x}{2}$

②より

$y=-\frac{3}{2}x+1$

$0<k<2$ より

$0<\frac{x}{2}<2$　∴ $0<x<4$

よって求める軌跡は

直線 $y=-\frac{3}{2}x+1$ の $0<x<4$ の部分

[4]

I. (1) $x^2=k(x+1)$ として

$x^2-kx-k=0$ —①

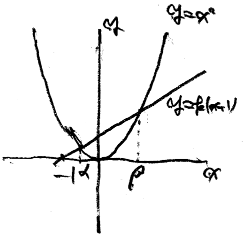
が異なる2実解をもてばよいから

判別式をDとして $D>0$ より

$D=k^2+4k>0$

$k(k+4)>0$　∴ $k<-4,\ k>0$

(2) このとき①の2実解をα, βとするとℓとCの2交点の中点Pは



$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\right)$

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=k$ より

$\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2+2k}{2}\right)$

$P(x, y)$ とおくと

$\begin{cases} x=\frac{k}{2} & —② \\ y=\frac{k^2+2k}{2} & —③ \end{cases}$

②より $k=2x$

①より

$y=\frac{4x^2+4x}{2}$

∴ $y=2x^2+2x$

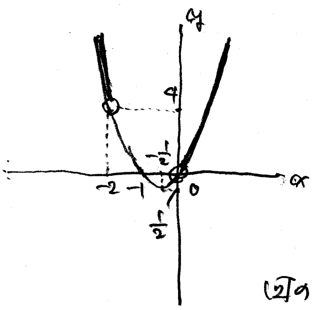
$k<-4,\ k>0$ より

$2x<-4,\ 2x>0$

∴ $x<-2,\ x>0$

求める軌跡は

放物線 $y=2x^2+2x$ の $x<-2,\ x>0$ の部分



図の太線部
○は除く。

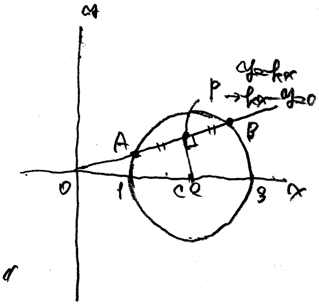
II.

(1) $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}<1$

$|2k|<\sqrt{k^2+1}$

$4k^2<k^2+1$

$k^2<\frac{1}{3}$　∴ $-\frac{1}{\sqrt{3}}<k<\frac{1}{\sqrt{3}}$



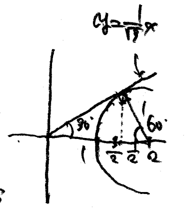
(2) Cの中心(2, 0)をCとする

$\angle OPC=90°$ より

PはOCを直径とする円周上を動く

よってPが描く軌跡は

円 $(x-1)^2+y^2=1$ の $\frac{3}{2}<x\leqq 2$ の部分



図略

注.

媒介変数表示で解くと結構面倒である

5

$y=mx+8$ と $x+my=6$ との交点を (X, Y) とおくと
ともに (X, Y) を通るから

$$\begin{cases} Y=mX+8 & \text{―①} \\ X+mY=6 & \text{―②} \end{cases}$$

①より

$mX=Y-8$

$X=0$ のとき $Y=8$

$X\neq 0$ のとき

$m=\dfrac{Y-8}{X}$

②より

$X+\dfrac{Y-8}{X}Y=6$

$X^2+Y(Y-8)=6X$

$X^2-6X+Y^2-8Y=0$

$(X-3)^2+(Y-4)^2=25$

$X=0$ のとき
$(Y-4)^2=16$
$\therefore Y=0, 8$

これらを合わせて交点の軌跡は
中心が $\boxed{(3, 4)}$ 半径が $\boxed{5}$ の円から
原点 $\boxed{(0, 0)}$ を除いた図形

6

(1) $y=x^2$ 上の点は (t, t^2) とおける
これと $(3, 5)$ を結ぶ線分の中点を (x, y) とおくと

$$\begin{cases} x=\dfrac{t+3}{2} & \text{―①} \\ y=\dfrac{t^2+5}{2} & \text{―②} \end{cases}$$

①より

$t=2x-3$

②より

$y=\dfrac{(2x-3)^2+5}{2}$

$\therefore y=2x^2-6x+7$

(2) $P(X, Y)$ とおくと
APの中点は

$\left(\dfrac{X}{2}, \dfrac{Y+1}{2}\right)$

これが $y=x^2$ 上にあるから

$\dfrac{Y+1}{2}=\dfrac{X^2}{4}$

$\therefore Y=\dfrac{X^2}{2}-1$

よって

$y=\dfrac{x^2}{2}-1$

(3) $P(a, b)$ とおく
APの中点は

$\left(\dfrac{a+2}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$

これを (x, y) とおくと

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+2}{2} & \text{―①} \\ y=\dfrac{b}{2} & \text{―②} \end{cases}$$

①, ②より $a=2x-2$, $b=2y$

(a, b) は $x^2+y^2=1$ 上の点より

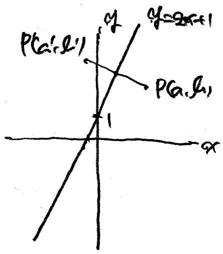
$a^2+b^2=1$

$(2x-2)^2+(2y)^2=1$

$\therefore (x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

(4) PP'の中点が $y=2x+1$ 上にあるから

$\left(\dfrac{a+a'}{2}, \dfrac{b+b'}{2}\right)$



$\dfrac{b+b'}{2}=a+a'+1$ ―①

$PP' \perp y=2x+1$ より

$\dfrac{b'-b}{a'-a}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore 2(b'-b)=-(a'-a)$ ―②

①+②より

$2a+1=\dfrac{5}{2}b'-\dfrac{3}{2}b$

$\dfrac{5}{2}b'=2a+\dfrac{3}{2}b+1$

$\therefore b'=\boxed{\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}b+\dfrac{2}{5}}$

②より

$2\left(\dfrac{4}{5}a-\dfrac{2}{5}b+\dfrac{2}{5}\right)=-a'+a$

$\therefore a'=\boxed{-\dfrac{3}{5}a+\dfrac{4}{5}b-\dfrac{4}{5}}$

$(a, b)=(t, -3t)$ のとき

$(a', b')=\boxed{\left(-t+\dfrac{2}{5}, -3t-\dfrac{4}{5}\right)}$

(x, y) として

$$\begin{cases} x=-t+\dfrac{2}{5} & \text{―③} \\ y=-3t-\dfrac{4}{5} & \text{―④} \end{cases}$$

③より $t=-x+\dfrac{2}{5}$

④より

$y=-3\left(-x+\dfrac{2}{5}\right)-\dfrac{4}{5}$

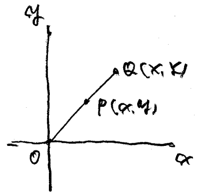
$\therefore y=3x-2$

また $t\geqq 0$ であるから $x\leqq\dfrac{2}{5}$ より P'は

$y=\boxed{3x-2}$ 上の $x\leqq\boxed{\dfrac{2}{5}}$ の部分を動く

$\boxed{7}$

(1) $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ $(k>0)$ より



$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}x=kX\\y=kY\end{cases}$ —①

$OP\cdot OQ=1$ より

$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{X^2+Y^2}=1$

$\sqrt{k^2(X^2+Y^2)}\sqrt{X^2+Y^2}=1$

$k(X^2+Y^2)=1$

$\therefore k=\dfrac{1}{X^2+Y^2}$ —②

①, ②より

$x=\dfrac{X}{X^2+Y^2},\ y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$ //

(2) Pがℓ上を動くとき

$3x+4y=5$ より

$3\cdot\dfrac{X}{X^2+Y^2}+4\cdot\dfrac{Y}{X^2+Y^2}=5$

$X^2+Y^2-\dfrac{3}{5}X-\dfrac{4}{5}Y=0$

$\left(X-\dfrac{3}{10}\right)^2+\left(Y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

よってQの軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{3}{10}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ //

<point>

1. 変換

点(x, y)と点(X, Y)を対応させる規則のこと
cf.（値xと値yを対応させる規則を関数という）

2. 反転

本問のような変換を反転という

$\boxed{8}$.

$P(X, Y)$とおく.

$\begin{cases}X=x+y\\Y=xy\end{cases}$

$x^2+y^2=1$

$(x+y)^2-2xy=1$

$X^2-2Y=1$

$\therefore Y=\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2}$

$t^2-(x+y)t+xy=0$ すなわち $t^2-Xt+Y=0$ は
x, yを2解とする2次方程式であり
x, yは実数であるから
判別式をDとすると$D\geqq 0$より

$X^2-4Y\geqq 0$ —(*)

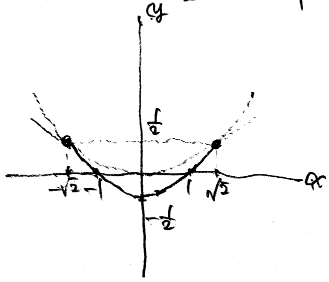
$\therefore Y\leqq\dfrac{X^2}{4}$

よって求める軌跡は

放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ の $y\leqq\dfrac{x^2}{4}$ の部分

$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2}{4}$ として

$x^2=2\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}$



//

注.

$Y=\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{2}$ 上の点で必ず逆像が存在するか注意

例えば $X=2,\ Y=\dfrac{3}{2}$ は　　　$(x, y)\ \underset{\text{逆像}}{\overset{\text{像}}{\rightleftarrows}}\ (X, Y)$

$\begin{cases}x+y=2\\xy=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$t^2-(x+y)t+xy=0$ すなわち $t^2-2t+\dfrac{3}{2}=0$ は
x, yを2解とする2次方程式であるが

$2t^2-4t+3=0$

$\therefore t=\dfrac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=x, y$

となり x, yは虚数となり x, yは実数とはならないので
$X=2,\ Y=\dfrac{3}{2}$ はとり得ない。（逆像(x, y)が存在しない）
したがって(*)は必ず調べなければならない。
このように軌跡の問題を解くときは必ず逆像が存在するかを調べなければならない。