高2数学　基本問題演習　演習　8. 高次方程式

$\boxed{1}$ [2023 早稲田大]

$a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とする。

(1)　a^3 を a の 1 次式で示せ。

(2)　a は整数であることを示せ。

(3)　$b=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とするとき，b を越えない最大の整数を求めよ。

$\boxed{2}$ [近畿大]

a を実数の定数として， x の 3 次方程式

$$x^3+(4-5a)x^2+(4a^2-3a+2)x-(a^2+2a)=0 \cdots\cdots①$$

の実数解の個数を考える．(ただし，重解は 1 個と数える．)

(1) $a=2$ のとき，3 次方程式 ① の実数解の個数と，実数解の値を求めよ．

(2) 3 次方程式 ① の実数解の個数が 1 個であるとき，定数 a がとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{3}$ [2017 早稲田大]

a，b，c は整数とする。4 次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+3=0$ の実数解が 1 と 3 となるような a の最大値は $^{ア}\boxed{}$ で，最小値は $^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{4}$ [2023 立命館大]

3 次方程式 $2x^3+2x^2+5x+7=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，

$\alpha+\beta+\gamma=^{ア}\boxed{}$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=^{イ}\boxed{}$，$\alpha\beta\gamma=^{ウ}\boxed{}$ である。このとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=^{エ}\boxed{}$

(2)　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=^{オ}\boxed{}$

(3)　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\left(\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\right)=^{カ}\boxed{}$

(4)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=^{キ}\boxed{}$

$\boxed{5}$ [学習院大]

a, b, c は実数とする．3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が 1 つの実数解と 2 つの純虚数解をもつための必要十分条件は $ab=c$ かつ $b>0$ であることを示せ．ただし，純虚数とは実数部分が 0 で虚数部分が 0 でない複素数をいう．

$\boxed{6}$ [名古屋大]

p を実数とする．方程式 $x^4+(8-2p)x^2+p=0$ が相異なる 4 個の実数解をもち，これらの解を小さい順に並べたときそれらは等差数列をなすとする．この p を求めよ．

$\boxed{7}$ [1997 近畿大]

c を実数とする．4 次方程式 $x^4+(c+1)x^2+2-c^2=0$ の異なる実数解の個数を調べよ．

$\boxed{8}$ [九州歯科大]

高次方程式に関する次の問いに答えよ．

(1) $t=x+\dfrac{a}{x}$ とおくとき，4 次方程式 $x^4+3x^3-11x^2-12x+16=0$ が t の 2 次方程式となるように a を決定し，この 2 次方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた t に関する 2 次方程式の 2 つの解を α と β とするとき，

$A=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $B=\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

(3) 4 次方程式 $x^4+3x^3-11x^2-12x+16=0$ の 4 つの解を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ とするとき，

$C=\dfrac{1}{\gamma_1}+\dfrac{1}{\gamma_2}+\dfrac{1}{\gamma_3}+\dfrac{1}{\gamma_4}$ と $D=(\gamma_1)^2+(\gamma_2)^2+(\gamma_3)^2+(\gamma_4)^2$ の値を求めよ．

$\boxed{9}$ [2022 奈良県立医科大]

方程式 $x^6-5x^5+2x^4+13x^3-4x^2-7x=0$ は相異なる 6 つの実数解をもつ。そのうち整数解は 2 つであり，$^{ア}\boxed{}$ と $^{イ}\boxed{}$ である。整数解を α_1，α_2，その他の解を α_3，α_4，α_5，α_6 とする。このとき，この方程式は $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_6)=0$ と書けることに注意すると，$\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=\,^{ウ}\boxed{}$，$\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6=\,^{エ}\boxed{}$，

${\alpha_3}^2+{\alpha_4}^2+{\alpha_5}^2+{\alpha_6}^2=\,^{オ}\boxed{}$ である。

$\boxed{10}$ [2023 近畿大]

方程式 $x^4+4x^3+7x^2+2x-5=0$ ……① について，次の問いに答えよ。

(1) $x=t-\alpha$ とおくと，① は t に関する方程式 $t^4+At^2+Bt+C=0$ と表される。このような α, A, B, C の値を求めよ。

(2) (1) で求めた A, B, C に対して，t に関する恒等式

$$t^4+At^2+Bt+C=(t^2+a)^2+b(t+c)^2$$

が成り立つ。a, b, c の値を求めよ。ただし，a, b, c はすべて実数とする。

(3) 方程式 ① を解け。

$\boxed{11}$ [1997 法政大]

a を定数として $f(x)=x^3-a(a+1)x^2+(a^3+a-1)x-a^2(a-1)$ とおく.
$f(1)=0$ を示し，x に関する不等式 $f(x)\geqq 0$ を解け.