基本問題演習17. 数列(1)

[1]

I. 初項をa, 公差をdとすると

$a_{11}=70$ より

$a+10d=70$ …①

$a_1+a_2+a_3=777$ より

$a+(a+d)+(a+2d)=777$

∴ $a+d=259$ …②

①,②より

$d=-21,\ a=280$

よって

$a_n=280-21(n-1)$

$=\boxed{301-21n}$

$a_n>0$ とすると

$301-21n>0$

$n<\frac{301}{21}=14.\cdots$

$n\leq 14$のとき $a_n>0$で

$n\geq 15$ 〃 $a_n<0$であるから

S_nは$n=14$のとき最大

このとき

$S_{14}=\frac{\overset{7}{\cancel{14}}(a_1+a_{14})}{\cancel{2}}$

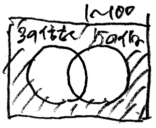
$=7\cdot(280+7)=\boxed{2009}$

II. (1) $\underset{3\cdot1}{3}+\underset{3\cdot2}{6}+\cdots+\underset{3\cdot33}{99}=\frac{33(\overset{51}{\cancel{3+99}})}{\cancel{2}}=1683$

(2) $5+10+\cdots+100=\frac{\overset{10}{\cancel{20}}(5+100)}{\cancel{2}}=1050$

(3) $15+30+\cdots+90=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}(15+90)}{\cancel{2}}=315$

(4) 求めるものは斜線部の和より



$\frac{\overset{50}{\cancel{100}}(1+100)}{\cancel{2}}-\underbrace{(1683+1050-315)}_{\text{3の倍数または5の倍数の和}}$

$=5050-2418=2632$

III. $\underset{=m}{\frac{5m}{5}},\frac{5m+1}{5},\cdots,\underset{=m+1}{\frac{5m+5}{5}},\cdots,\underset{=n-1}{\frac{5n-5}{5}},\cdots,\frac{5n-1}{5},\underset{=n}{\frac{5n}{5}}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{5n-5m+1\text{個}}$

求める和Sは

$S=\frac{1}{2}(5n-5m+1)(m+n)-\underbrace{\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)}_{m,\ m+1,\ \cdots,\ n\text{の和}}$

$=\frac{1}{2}(m+n)\{(5n-5m+1)-(n-m+1)\}$

$=2(m+n)(n-m)$

<point>

1. 等差数列の一般項

第n項までの和

[2].

初項をa, 公比をrとすると

$a_3=4$ より $ar^2=4$ …①

$a_6=-\frac{1}{2}$ より $ar^5=-\frac{1}{2}$ …②

②/①より

$r^3=-\frac{1}{8}$ ∴ $r=\boxed{-\frac{1}{2}}$, $a=\boxed{16}$

第11項から第20項までの和

初項a_{11}, 公比rの等比数列の第10項までの和と考えて

$\frac{16\cdot(-\frac{1}{2})^{10}\{1-(-\frac{1}{2})^{10}\}}{1+\frac{1}{2}}$

$=\frac{2^5\cdot\frac{1}{2^{10}}(1-\frac{1}{2^{10}})}{3}$

$=\frac{2^{\boxed{10}}-1}{3\cdot2^{\boxed{15}}}$

<point>

1. 等比数列の一般項

第n項までの和

3

(1) a, b, c がこの順で等差数列より

$a+c=2b$ …①

a, c, b がこの順で等比数列より

$ab=c^2$ …②

$abc=27$ …③

②, ③より

$c^3=27$ ∴ $c=3$

このとき①より $a=2b-3$

②より

$b(2b-3)=9$

$2b^2-3b-9=0$ $\quad \begin{matrix}1 & & -3\\ & \times & \\ 2 & & 3\end{matrix}$

$(b-3)(2b+3)=0$

b, c は異なる実数より $b=-\frac{3}{2}$, $a=-6$

よって

$(a, b, c)=\left(-6, -\frac{3}{2}, 3\right)$

(2) $1, a, b, c$ が等差数列より

$b+1=2a$ …①

$a, b, 1, c$ が等比数列より

$b^2=a$ …②

①, ②より

$2b^2-b-1=0$ $\quad \begin{matrix}1 & & -1\\ & \times & \\ 2 & & 1\end{matrix}$

$(b-1)(2b+1)=0$

∴ $b=1, -\frac{1}{2}$

i) $b=1$ のとき $a=1$

このとき $c=1$

ii) $b=-\frac{1}{2}$ のとき $a=\frac{1}{4}$

$1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, c$ が等差数列より $c=-\frac{5}{4}$

$\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{4}$ は等比数列とはならないので不適

i), ii)より $c=1$

<point>

1. 等差中項・等比中項

4

I. $S_n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(1) $T_n=\sum_{k=1}^{n} S_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$=\frac{1}{12}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(2) $U_n=\sum_{k=1}^{n} T_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$

$=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)\right\}$

$=\frac{1}{24}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$

$=\frac{1}{24}n(n+1)(n^2+5n+6)$

$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$

II. $1\cdot n+2\cdot(n-1)+\cdots+n\cdot 1$

$=\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

$=-\sum_{k=1}^{n} k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n} k$

$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

III. $a_n=1+10+\cdots+10^{n-1}$

$=\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}$

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)$

$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$

$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$

<point>

1. Σ公式

5

$f_{k+1}(n) - f_{k+1}(n-1)$

$= n(n+1)\cdots(n+k) - (n-1)n\cdots(n+k-1)$

$= n(n+1)\cdots(n+k-1)\{(n+k)-(n-1)\}$

$= \boxed{(k+1)}\, f_k(n)$

$f_k(r) = \frac{1}{k+1}\{f_{k+1}(r) - f_{k+1}(r-1)\}$ $(r \geqq 2)$

$\sum_{r=1}^{n} f_k(r) = f_k(1) + \frac{1}{k+1}[\{f_{k+1}(2) - f_{k+1}(1)\} + \cdots + \{f_{k+1}(n) - f_{k+1}(n-1)\}]$

$= f_k(1) - \frac{1}{k+1} f_{k+1}(1) + \frac{1}{k+1} f_{k+1}(n)$

$= k! - \frac{1}{k+1}(k+1)! + \frac{1}{k+1} f_{k+1}(n)$

$= \boxed{\frac{1}{k+1}}\, f_{k+1}(n)$

$1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n(n+1) = \sum_{r=1}^{n} f_2(r)$

$= \frac{1}{3} f_3(n)$

$= \boxed{\frac{1}{3}}\, n(n+1)\boxed{(n+2)}$

$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k) = \sum_{r=1}^{n} f_{k+1}(r)$

$= \frac{1}{k+2} f_{k+2}(n)$

$= \frac{1}{k+2} n(n+1)\cdots(n+k+1)$

$= \boxed{\frac{1}{k+2}} \cdot \frac{(n+\boxed{k+1})!}{(n-1)!}$

6

I. $5,\ 7,\ 11,\ \cdots$ $\quad {}_{+2}\ {}_{+4}$

$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$が等差数列であるとき

$b_n = 2n$

このとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n \geqq 2)$

$= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$

$= 5 + (n-1)n$

$= n^2 - n + 5$

これは$n=1$のときも成り立つから

$a_n = n^2 - n + 5$ $(n \geqq 1)$

$\{a_n\}$の階差数列$\{c_n\}$が等比数列であるとき

$c_n = 2^n$

このとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ $(n \geqq 2)$

$= 5 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$= 2^n + 3$

これは$n=1$のときも成り立つから

$a_n = 2^n + 3$ $(n \geqq 1)$

II.

1) $b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 6,\ b_4 = 13,\ b_5 = 23$

2) $\{b_n\}$の階差数列をc_nとすると

$c_1 = 1,\ c_2 = 4,\ c_3 = 7,\ c_4 = 10,\ \cdots$

初項1, 公差3の等差数列より

$c_n = 1 + 3(n-1)$

$= 3n - 2$

より

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ $(n \geqq 2)$

$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k-2)$

$= 1 + 3\cdot\frac{(n-1)n}{2} - 2(n-1)$

$= \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)$

これは$n=1$のときも成り立つから

$b_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)$ $(n \geqq 1)$

3) $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ $(n \geqq 2)$

$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2 - 7k + 6)$

$= 1 + \frac{1}{2}\{\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}\,2}(n-1)n(2n-1) - \frac{7}{2}(n-1)n + 6(n-1)\}$

$= 1 + \frac{1}{4}(n-1)\{n(2n-1) - 7n + 12\}$

$= 1 + \frac{1}{4}(n-1)(2n^2 - 8n + 12)$

$= 1 + \frac{1}{2}(n-1)(n^2 - 4n + 6)$

これは$n=1$のときも成り立つから

$a_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1)(n^2 - 4n + 6)$ $(n \geqq 1)$

<point>

1. 階差数列

7

(1) $a_2 = S_2 - S_1$ 　　　　$a_1 = -41$

$= -59 - (-41) = -18$

(2) $a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geqq 2)$

$= -\{n^3 - (n-1)^3\} + 15\{n^2 - (n-1)^2\} - 56\{n - (n-1)\}$

$= -(3n^2 - 3n + 1) + 15(2n - 1) - 56$

$= -3n^2 + 33n - 72$

$a_n \geqq 0$ とすると

$-3n^2 + 33n - 72 \geqq 0$

$n^2 - 11n + 24 \leqq 0$

$(n-3)(n-8) \leqq 0$ 　$\therefore 3 \leqq n \leqq 8$

$n \geqq 9$ のとき $a_n < 0$ より

$S_1 > S_2 = S_3 < S_4 < \cdots < S_7 = S_8 > S_9 > S_{10} > \cdots$

$S_1 = -41$

$S_7 = -7^3 + 15 \cdot 7^2 - \overset{7\cdot 8}{\overset{\shortparallel}{56}} \cdot 7 + 1$

$= 7^2(-7 + 15 - 8) + 1 = 1$

より S_n の最大値は 1

<point>

1. a_n と S_n の関係

8

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k$ とおく

$S_1 = a_1 = \boxed{24}$

$S_2 - S_1 = 2a_2$ より

$2a_2 = 2\cdot3\cdot4\cdot5 - 1\cdot2\cdot3\cdot4$

$= 96$

$\therefore a_2 = \boxed{48}$

(2) $S_n - S_{n-1} = n a_n$ より $(n \geqq 2)$

$n a_n = n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$

$= (n+1)(n+2)\{(n+3) - (n-1)\}$

$= 4(n+1)(n+2)$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$a_n = \boxed{4(n+1)(n+2)}\ (n \geqq 1)$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} 4(k+1)(k+2)$

$= 4\left\{\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) - 2\right\}$

$= \boxed{\frac{4}{3}(n+1)(n+2)(n+3) - 8}$

(4) $T_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \boxed{\frac{n}{8(n+2)}}$

(5) $\frac{23}{200} < T_n < \frac{3}{25}$ となるとき

$\frac{23}{200} < \frac{1}{8} - \frac{1}{4(n+2)} < \frac{3}{25}$

$-\frac{1}{100} < -\frac{1}{4(n+2)} < -\frac{1}{200}$

$\frac{1}{200} < \frac{1}{4(n+2)} < \frac{1}{100}$

$100 < 4(n+2) < 200$

$25 < n+2 < 50$

$\therefore \boxed{23 < n < 48}$