基本問題演習 34. 積分法3)

[1]

(1) $A=\int_0^3(-x^2+3x)dx$

$=-\int_0^3 x(x-3)dx$

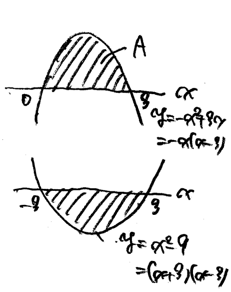
$=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}$

$B=-\int_{-3}^{3}(x^2-9)dx$

$=-\int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)dx$

$=\frac{1}{6}\{3-(-3)\}^3=36$

$\frac{B}{A}=\frac{36}{\frac{9}{2}}=8$



(2) $2x^2=2x+2$ として

$x^2-x-1=0$

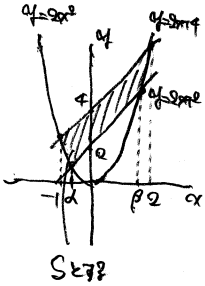
∴ $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とする

$2x^2=2x+4$ として

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

∴ $x=-1,2$



$S=\int_{-1}^{2}(2x+4-2x^2)dx-\int_\alpha^\beta(2x+2-2x^2)dx$

$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=2\cdot\frac{3^3}{6}-2\cdot\frac{(\sqrt{5})^3}{6}$

$=\boxed{9-\frac{5\sqrt{5}}{3}}$

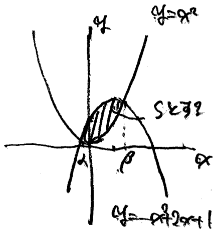
(3) $y=-x^2+2x+1$

$=-(x-1)^2+2$

$x^2=-x^2+2x+1$ として

$2x^2-2x-1=0$

∴ $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とする



$S=\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-x^2)dx$

$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3=\sqrt{3}$

[2]

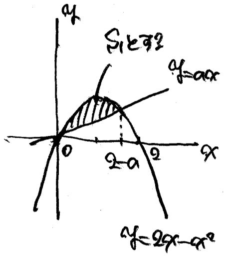
I. (1) $y=2x-x^2$

$=-x(x-2)$

$2x-x^2=ax$ として

$x\{x-(2-a)\}=0$

∴ $x=0,\ 2-a$



$S_1=\int_0^{2-a}\{2x-x^2-ax\}dx$

$=-\int_0^{2-a}x\{x-(2-a)\}dx$

$=\frac{1}{6}(2-a)^3$

(2) Cとx軸とで囲まれた部分の面積Sは

$S=\int_0^2(2x-x^2)dx$

$=-\int_0^2 x(x-2)dx$

$=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}S$ となるとき

$\frac{1}{6}(2-a)^3=\frac{2}{3}$

$(2-a)^3=4$

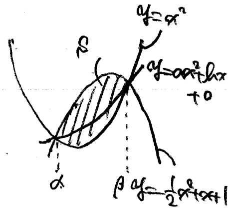
$2-a=\sqrt[3]{4}$

∴ $a=2-\sqrt[3]{4}$

II (1) $S=\int_\alpha^\beta(-\frac{1}{2}x^2+x+1-x^2)dx$

$=-\frac{3}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\boxed{\frac{1}{4}}(\beta-\alpha)^{\boxed{3}}$



$\frac{3}{2}x^2-x-1=0$ すなわち $3x^2-2x-2=0$ の2解

$x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$

より

$=\frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^3=\boxed{\frac{14\sqrt{7}}{27}}$

(2) $ax^2+bx+c=x^2$ として

$(a-1)x^2+bx+c=0$

の2解が α, β である

$y=ax^2+bx+c$ が S を2等分するとき

$\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c-x^2)dx=\frac{7\sqrt{7}}{27}$

$(a-1)\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{7\sqrt{7}}{27}$

$(1-a)\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{7\sqrt{7}}{27}$

$(1-a)\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^3=\frac{7\sqrt{7}}{27}$

$(1-a)\cdot\frac{\cancel{28}\sqrt{\cancel{7}}}{\cancel{81}}=\frac{\cancel{7}\sqrt{\cancel{7}}}{\cancel{27}}$

$1-a=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$ //

解と係数の関係より

$-\frac{b}{a-1}=\frac{2}{3}$ $\quad b=\frac{2}{3}(1-a)=\frac{1}{2}$

$\frac{c}{a-1}=-\frac{2}{3}$ $\quad c=\frac{2}{3}(1-a)=\frac{1}{2}$ //

$\boxed{3}$

I. 囲まれる領域を作るから

(1, 2)を通る直線に傾きをmとして

$y-2=m(x-1)$

$\therefore y=mx-m+2$

とおける

$x^2=mx-m+2$ として

$x^2-mx+m-2=0$

$\therefore x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4m+8}}{2}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおく

囲まれる領域の面積Sは

$S=\int_\alpha^\beta\{mx-m+2-x^2\}dx$

$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-4m+8}\right)^3$

$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$

$m=2$ のとき最小で

最小値 $\frac{4}{3}$ //

II. (1) $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$

$=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$

$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta$

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ □

(2) C_2: $y=-(x-a)^2-\frac{1}{2}a+1$ とおける

$=-x^2+2ax-a^2-\frac{1}{2}a+1$

$x^2=-x^2+2ax-a^2-\frac{1}{2}a+1$ として

$2x^2-2ax+a^2+\frac{1}{2}a-1=0$

判別式をDとするとD>0より

$D/4=a^2-2(a^2+\frac{1}{2}a-1)$

$=-a^2-a+2>0$

$a^2+a-2<0$

$(a+2)(a-1)<0$ $\quad\therefore -2<a<1$

このときの2実解

$x=\frac{a\pm\sqrt{-a^2-a+2}}{2}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とする

$S=\int_\alpha^\beta\{-x^2+2ax-a^2-\frac{1}{2}a+1-x^2\}dx$

$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-a^2-a+2}\right)^3$

$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-(a+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}\right)^3$

$a=-\frac{1}{2}$ のとき最大で

最大値 $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{8}$ //

$\boxed{5}$ (順番を間違えました)

II $f(x)=x^2$ とおく

$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-t^2=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2$

これが(1, −3)を通るとき

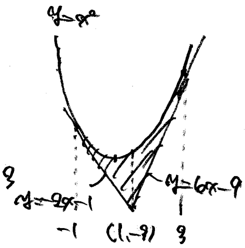
$-3=2t-t^2$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-1, 3$

$t=-1$ のとき $y=-2x-1$

$t=3$ 〃 $y=6x-9$



求める面積Sは

$S=\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$

$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}$

$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ //

4

(1) $f(x)=x^2$ とおく

$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ の $x=t$ における法線は $(t\neq0)$

$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$

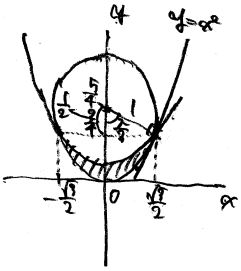
∴ $y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$

これが $(0,\frac{5}{4})$ を通るとき

$\frac{5}{4}=t^2+\frac{1}{2}$

$t^2=\frac{3}{4}$　　∴ $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって接点は $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$



(2) (1)から半径は1より

$x^2+(y-\frac{5}{4})^2=1$

(3) 求める面積Sは

$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(\frac{3}{2}-x^2)dx-(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overset{\shortparallel}{\sin\frac{2\pi}{3}}})$

$=\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$

5

I. $f(x)=x^2-4x$ とおく

$f'(x)=2x-4$

$y=f(x)$ の $(3,-3)$ における接線は

$y+3=f'(3)(x-3)$

$y+3=2(x-3)$

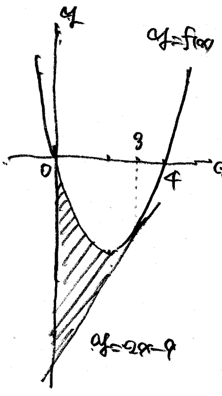
∴ $y=2x-9$

求める面積Sは

$S=\int_0^3\{x^2-4x-(2x-9)\}dx$

$=\int_0^3(x-3)^2dx$

$=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^3=9$



III. (1) $f(x)=x^2$ とおく.

$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-t^2=2t(x-t)$

∴ $y=2tx-t^2$

これが $y=x^2-4x+8$ にも接するとき

$x^2-4x+8=2tx-t^2$ として

$x^2-2(t+2)x+t^2+8=0$

が重解をもてばよいから

判別式をDとして $D=0$ より

$D/4=(t+2)^2-(t^2+8)$

$=4t-4=0$　　∴ $t=1$

このとき接線は $y=2x-1$

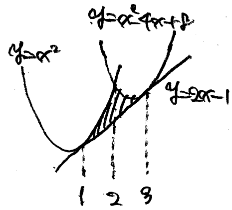
$y=x^2-4x+8$ との接点のx座標は

$x^2-4x+8=2x-1$

$(x-3)^2=0$　　∴ $x=3$

(2) $x^2=x^2-4x+8$ として

$4x=8$　　∴ $x=2$



求める面積Sは

$S=\int_1^2\{x^2-(2x-1)\}dx+\int_2^3\{x^2-4x+8-(2x-1)\}dx$

$=\int_1^2(x-1)^2dx+\int_2^3(x-3)^2dx$

$=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^2+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_2^3$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

7

I. (1) $f(x)=x^3-x$

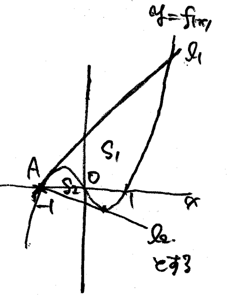
$f'(x)=3x^2-1$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

∴ $y=(3t^2-1)x-2t^3$



これが $A(-1,0)$ を通るとき

$2t^3+3t^2-1=0$ より

$(t+1)(2t^2+t-1)=0$

$(t+1)^2(2t-1)=0$　　∴ $t=-1,\ \frac{1}{2}$

よって $y=2x+2$, $y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

(2) $x^3-x=2x+2$ として

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$ ∴ $x=-1, 2$

$S_1=\int_{-1}^{2}\{2x+2-(x^3-x)\}dx$

$=-\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx$

$=\frac{1}{12}\cdot 3^4=\frac{27}{4}$

$S_2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{x^3-x-(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})\}dx$

$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)(x-\frac{1}{2})^2dx$

$=\frac{1}{12}(\frac{3}{2})^4=\frac{27}{64}$

II. (1) $f(x)=x^3-x+a$, $g(x)=x^2$ とおく

$f'(x)=3x^2-1$　　$g'(x)=2x$

$x=t\ (t>0)$ で共通接線をもつとき

$$\begin{cases} f(t)=g(t):\ t^3-t+a=t^2 & \text{—①} \\ f'(t)=g'(t):\ 3t^2-1=2t & \text{—②} \end{cases}$$

②より

$3t^2-2t-1=0$　　$\begin{matrix}1 & \times & -1\\ 3 & & 1\end{matrix}$

$(t-1)(3t+1)=0$

∴ $t=1$

このとき①より $a=\boxed{1}$

(2) 共通接線は

$y-1=2(x-1)$ ∴ $\boxed{y=2x-1}$

接点は $\boxed{(1,1)}$

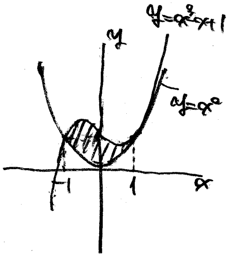
(3) $x^3-x+1=x^2$ として

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x-1)^2(x+1)=0$ ∴ $x=-1, 1$

よって $\boxed{(-1,1)}$

(4) 求める面積Sは



$S=\int_{-1}^{1}\{x^3-x+1-x^2\}dx$

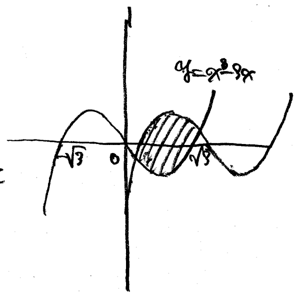
$=\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)^2dx$

$=\frac{1}{12}\cdot 2^4=\boxed{\frac{4}{3}}$

[8]

$y=x^3-3x$

$=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$



$C_2: y=(x-2)^3-3(x-2)$

$x^3-3x=(x-2)^3-3(x-2)$ として

$-6x^2+12x-8+6=0$

$3x^2-6x+1=0$

∴ $x=\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}=a, b\ (a<b)$ とする

CとC₂で囲まれる面積Sは

$S=\int_a^b\{(x-2)^3-3(x-2)-(x^3-3x)\}dx$

$=\int_a^b(-6x^2+12x-2)dx$

$=-6\int_a^b(x-a)(x-b)dx$

$=(b-a)^3$

$=(\frac{2\sqrt{6}}{3})^3=\frac{16\sqrt{6}}{9}$

[9]

$x^4-2x^3-3x^2+5x+5=ax+b$ として

$x^4-2x^3-3x^2+(5-a)x+5-b=0$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=\alpha, x=\beta$ で接するから

$x^4-2x^3-3x^2+(5-a)x+5-b=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2)$

$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$

これが任意のxで成りたつとき

$$\begin{cases} -2(\alpha+\beta)=-2 & \text{—①} \\ \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=-3 & \text{—②} \\ -2\alpha\beta(\alpha+\beta)=5-a & \text{—③} \\ \alpha^2\beta^2=5-b & \text{—④} \end{cases}$$

①より $\alpha+\beta=1$

②より $(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$ ∴ $\alpha\beta=-2$

③より

$4=5-a$ ∴ $a=\boxed{1}$

④より

$4=5-b$ ∴ $b=\boxed{1}$

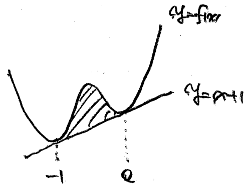
α, β は $t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$ すなわち

$t^2-t-2=0$ の解より

$(t+1)(t-2)=0$

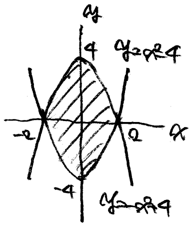
$\alpha<\beta$ より $\alpha=\boxed{-1}$, $\beta=\boxed{2}$

$$S=\int_{-1}^{2}\{f(x)-(x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2dx$$
$$=\frac{1}{30}\cdot\{2-(-1)\}^5=\boxed{\frac{81}{10}}$$

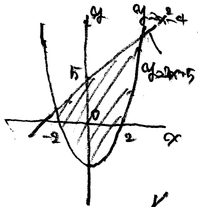


$\boxed{10}$

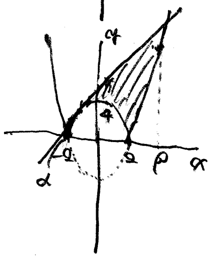
(1) $ア=\int_{-2}^{2}\{(-x^2+4)-(x^2-4)\}dx$
$$=-2\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 4^3=\boxed{\frac{64}{3}}$$



$x^2-4=2x+5$ として
$x^2-2x-9=0$
$\therefore x=1\pm\sqrt{10}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とする



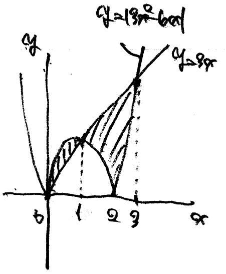
$イ=\int_{\alpha}^{\beta}\{2x+5-(x^2-4)\}dx$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}\underbrace{(\beta-\alpha)}_{2\sqrt{10}}{}^3=\boxed{\frac{40\sqrt{10}}{3}}$$



$-x^2+4=2x+5$ として
$x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0\quad\therefore x=-1$

$ウ=イ-ア=\boxed{\frac{40\sqrt{10}-64}{3}}$

(2) $-3x^2+6x=3x$ として
$x^2-x=0$
$x(x-1)=0\quad\therefore x=0,1$
$3x^2-6x=3x$ として
$x(x-3)=0\quad\therefore x=0,3$



求める面積Sは
$$S=\int_0^1\{-(3x^2-6x)-3x\}dx+\frac{1}{2}|-9-3|$$
$$=-3\int_0^1 x(x-1)dx+6$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1-0)^3+6=\frac{13}{2}$$

面積に同じ

$$S=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

xの2乗の係数とα β の差にしか依存しない