高2数学　基本問題演習　演習　16. 指数・対数関数

$\boxed{1}$ [(1) 2020 東京電機大　(2) 2011 職業能力開発総合大学校]

(1) 正の実数 a に対して，$\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^4}\times\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[6]{a^5}}\right)^6$ を a^p の形で表せ。

(2) $\sqrt[4]{a^3\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}\div\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{242}}\cdot\sqrt[6]{a^{13}}}$ を計算せよ。

$\boxed{2}$ [筑波大]

$\log_2 x=\log_3 y=\log_4 z=\log_5 w$ のとき， $x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{3}}, z^{\frac{1}{4}}, w^{\frac{1}{5}}$ の大小を比較せよ.

$\boxed{3}$ [Ⅰ．2016 立命館大　Ⅱ．2000 津田塾大]

Ⅰ．x の方程式 $9^x-a\cdot 3^{x+1}+a+1=0$ について

(1)　$a=-2$ のとき，実数解は $x=$ ${}^{ア}\boxed{}$ である。

(2)　異なる 2 つの正の実数解をもつとき，a の値の範囲は ${}^{イ}\boxed{}<a<{}^{ウ}\boxed{}$ である。

Ⅱ．x についての方程式 $9^x+2a\cdot 3^x+2a^2+a-6=0$ が正の解，負の解を 1 つずつもつとき，定数 a のとる値の範囲を求めよ.

$\boxed{4}$ [2021 福井大]

$f(x)=16\cdot 9^x-4\cdot 3^{x+2}-3^{-x+2}+9^{-x}$ とし，$t=4\cdot 3^x+3^{-x}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　t の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ を t の式で表せ。

(3)　x の方程式 $f(x)=k$ の相異なる実数解の個数が 3 個であるとき，定数 k の値と，3 つの実数解を求めよ。

$\boxed{5}$ [(1) 2001 創価大　(2) 2022 関西大]

(1) x, y, z を実数とするとき，2 つの式 $2^x=4^y=8^z=a$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$ を満たす実数 a の値を求めよ.

(2) p, q を 1 より大きい実数とする。x, y, z を $xyz\neq 0$ かつ $p^x=q^y=(pq)^z$ を満たす実数とするとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ を z を用いて表すと $\boxed{}$ になる。

$\boxed{6}$ [(1) 早稲田大　(2) 1997 横浜国立大]

(1) $a^2<b<a<1$ であるとき， $\log_a b, \log_b a, \log_a \dfrac{a}{b}, \log_b \dfrac{b}{a}, \dfrac{1}{2}$ を小さい方から順に並べよ.

(2) $x>2, y>2$ のとき，$\log_a\left(\dfrac{x+y}{2}\right), \dfrac{\log_a(x+y)}{2}, \dfrac{\log_a x+\log_a y}{2}$ を値の小さい順に並べよ.

$\boxed{7}$ [Ⅰ. 2017 摂南大　Ⅱ. 2003 大阪女子大　Ⅲ. 2010 関西大]

Ⅰ. a を実数の定数とする。x に関する方程式 $\log_2(x-1)-\log_4(2x-a)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a の値の範囲は ${}^{ア}\boxed{}<a<{}^{イ}\boxed{}$ である。

Ⅱ. (1) ～ (3) の 3 つの場合に対して，次の不等式を解け．ただし，a は定数である.

$$\log_{10}(6-x)+\log_{10}(x+1)\leqq\log_{10}(x-a)$$

(1)　$6\leqq a$ の場合

(2)　$-1\leqq a<6$ の場合

(3)　$-10<a<-1$ の場合

Ⅲ. a は定数で $0<a<1$ である。不等式

(A)　$2\log_a(x+a)>\log_a(2x+2)$

について，次の問いに答えよ。

(1)　不等式 (A) を満たす x の範囲を求めよ。

(2)　不等式 (A) を満たす正の整数 x がただ 1 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ [2015 津田塾大]

不等式 $\log_x y + 2\log_y x < 3$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ。

$\boxed{9}$ [2023 星薬科大]

$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ として，次の問いに答えよ。

(1)　18^{49} は ${}^{ア}\boxed{}$ 桁の自然数で，最高位の数字は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　$\left(\dfrac{15}{32}\right)^{15}$ を小数で表すと，小数第 ${}^{ウ}\boxed{}$ 位にはじめて 0 でない数字が現れ，その数字は ${}^{エ}\boxed{}$ である。

$\boxed{10}$ [(1) 2006 東北大　(2) 2008 慶応義塾大]

(1) 6^n が 39 桁の自然数になるときの自然数 n を求めよ。その場合の n に対する 6^n の最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

(2) ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。

$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

$\boxed{11}$ [2015 慶応義塾大]

a は $2^{2\log_4 48 - \log_2 \frac{3}{4}}$ である。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。このとき，

(1)　a の値を整数で表すと $\boxed{}$ である。

(2)　a^{30} は $\boxed{}$ 桁の数である。

(3)　b は，b^{50} を小数で表すと小数第 25 位に初めて 0 でない数字が現れる正の数である。このとき $\left(\dfrac{b}{a}\right)^4$ を小数で表すと，小数第 $\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{12}$ [2003 慶應義塾大]

$\log_3 7$ は有理数ではないことを証明せよ.