高2数学　基本問題演習　演習　27. 軌跡と領域(1)

$\boxed{1}$ [2009 駒澤大]

座標平面上に，点 A (1，0) と点 B (−1，0) がある。∠APB＝30° となる点 P (x，y) の軌跡は，$y>0$ のとき $x^2+\left(y-\sqrt{^{ア}\boxed{}}\right)^2={}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$ [(1) 2005 近畿大　(2) 2002 近畿大　(3) 2021 名城大]

(1) 円 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ は原点 O と点 B $\left({}^{ア}\boxed{},\ {}^{イ}\boxed{}\right)$ からの距離の比が ${}^{ウ}\boxed{}$: ${}^{エ}\boxed{}$ である点の軌跡を表している。

(2) 定点 A (0，2) と直線 l : $y=0$ までの距離がともに 3 である点の座標を求めよ．また，A を通り l に接する円の中心の軌跡の方程式を求めよ．

(3) 点 P (a，b) を中心とする円 C は，直線 $y=3$ に接するとともに，円 $x^2+y^2=1$ に外接しながら動く。このとき，C の半径を b を用いて表すと ${}^{ア}\boxed{}$ であり，P が描く軌跡の方程式は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$ [(1) 1997 愛知大　(2) 2019 駒澤大]

(1) 点 (1, 0) をA，点 (1, 1) を B とする．放物線 $y=x^2+px+2$ が線分 AB と共有点をもつとき，放物線の頂点 (X, Y) はどのような図形を描くか．

(2) 方程式 $x^2+y^2-6kx+(12k-2)y+46k^2-16k+1=0$ が円を表すような定数 k の値の範囲は，${}^{ア}\boxed{}<k<{}^{イ}\boxed{}$ である。また，k の値がこの範囲で変化するとき，円の中心の軌跡を表す方程式は，$y={}^{ウ}\boxed{}x+{}^{エ}\boxed{}$ $\left({}^{オ}\boxed{}<x<{}^{カ}\boxed{}\right)$ である。

$\boxed{4}$ [Ⅰ．2002 関西大　Ⅱ．2020 慶応義塾大　Ⅲ．2019 旭川医科大]

Ⅰ．点 (1，−1) を通る直線を l，放物線 $y=x^2-x$ を C とする．

(1)　直線 l の傾きを m とする．l が放物線 C と 2 点で交わるとき，m の値の範囲を求めよ．

(2)　(1) で l が C で切り取られる線分の中点を P (X，Y) とする．X，Y を m を用いて表せ．

(3)　(2) より，Y は X の 2 次関数 $Y={}^{ア}\boxed{}$ となり，(1) より，X の値の範囲は ${}^{イ}\boxed{}$ となる．このとき，中点 P の軌跡を XY 平面上にかけ．

Ⅱ．xy 平面上の放物線 $y=x^2$ 上を動く 2 点 A，B と原点 O を線分で結んだ三角形 AOB において，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ である。このとき，三角形 AOB の重心 G の軌跡の方程式は $y=\boxed{}$ である。

Ⅲ．a は定数で $a>1$ とし，点 $(a,\ 0)$ を通る傾き m の直線と円 $x^2+y^2=1$ が異なる 2 点 A，B で交わる。

(1)　m の値の範囲を求めよ。

(2)　(1) で求めた範囲を m が動くとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

$\boxed{5}$ [1997 岐阜大]

xy 平面において直線 l : $x+t(y-3)=0$, m : $tx-(y+3)=0$ を考える
(ただし，t は実数).

(1)　l は t の値にかかわりなくある定点を通ることを示せ.

(2)　t が実数全体を動くとき，l と m との交点はどんな図形を描くか.

$\boxed{6}$ [Ⅰ. 2016 日本女子大 Ⅱ. 2003 名城大 Ⅲ. 2022 三重大 Ⅳ. 1997 東海大]

Ⅰ．放物線 $y=x^2-2x+3$ を C とする。原点 O，点 A (2，0)，C 上の点 P を頂点とする △OAP の重心を G とし，線分 GP の中点を M とする。点 P が C 上を動くとき，点 M の軌跡の方程式を求めよ。

Ⅱ．点 A (0，3) と動点 P $(x,\ y)$ を結ぶ線分の中点が放物線 $y=x^2$ 上にあるとき

(1)　点 P の軌跡を求めよ.

(2)　線分 PA の長さの最小値を求めよ.

Ⅲ．平面上の 2 点 A$(-2,\ -2)$，B$(1,\ -4)$ と円 $x^2-2x+y^2-2y-2=0$ 上の点 P を頂点とする △ABP を考える。P が円周上を動いたとき，△ABP の重心 G の軌跡を求めよ。

Ⅳ．直線 l : $x+y=1$ に関して点 (u, v) と点 (X, Y) が対称な位置にあるとき，u, v を X, Y を用いて表すと，$u=$ ア$\boxed{}$, $v=$ イ$\boxed{}$ である．また，直線 l に関して放物線 $y=x^2$ と対称な図形の方程式は ウ$\boxed{}$ である.

$\boxed{7}$ [1997 北星学園大]

座標平面上で原点 O から出る半直線の上に 2 点 P, Q があり OP·OQ$=2$ を満たしている.

(1) 点 P, Q の座標をそれぞれ $(x,\ y)$, (X, Y) とするとき，x, y を X, Y で表せ.

(2) 点 P が直線 $x-3y+2=0$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ.

$\boxed{8}$ [2010 静岡大]

xy 平面上の原点 O 以外の点 P$(x,\ y)$ に対して，点 Q を次の条件を満たす平面上の点とする。

(A) Q は，O を始点とする半直線 OP 上にある。

(B) 線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積は 1 である。

(1) Q の座標を x，y を用いて表せ。

(2) P が円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 上の原点以外の点を動くときの Q の軌跡を求め，平面上に図示せよ。

(3) P が円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 上を動くときの Q の軌跡を求め，平面上に図示せよ。

$\boxed{9}$ [2013 東京薬科大]

a，b が実数のとき $x=a+b$，$y=ab$ とすると，a，b は t に関する方程式 $t^2-xt+y=0$ の解であるから，$y \leqq \dfrac{x^2}{{}^{ア}\boxed{}}$ が成り立つ。したがって，実数 a，b が，

$a^2+4ab+b^2+4a+4b-8=0$ を満足しながら変化するとき，$(x,\ y)$ を座標とする点 P の軌跡は，$y=-\dfrac{x^2}{{}^{イ}\boxed{}}-{}^{ウ}\boxed{}x+{}^{エ}\boxed{}\left(x \leqq -{}^{オ}\boxed{},\ x \geqq {}^{カ}\boxed{}\right)$ となる。