基本問題演習19. 漸化式(1)

[1]

(1) $a_{n+1}=a_n+2n-1$

$a_{n+1}-a_n=2n-1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと ($\{b_n\}$は$\{a_n\}$の階差数列)

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad (n\geqq 2)$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$

$=n^2-2n+2$

これは$n=1$のときも成りたつから

$a_n=n^2-2n+2 \quad (n\geqq 1)$ //

(2) $a_{n+1}=a_n+2^n-2n$

$a_{n+1}-a_n=2^n-2n$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad (n\geqq 2)$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-2k)$

$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-2\cdot\frac{(n-1)n}{2}$

$=2^n-n^2+n-1$

これは$n=1$のときも成りたつから

$a_n=2^n-n^2+n-1 \quad (n\geqq 1)$ //

<point>

1. 2項間漸化式(階差型)

[2]

(1) $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1} \quad (n=2,3,\cdots)$

$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1} \qquad a_2=3a_1=3$

十分大きいnに対して

$a_n=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}a_{n-2}$

$\vdots$

$=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdots\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$

$=\frac{n(n+1)}{2} \quad (n\geqq 3)$ //

これは$n=1,2$のときも成りたつ

$a_n=\frac{n(n+1)}{2} \quad (n\geqq 1)$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2a_k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$ //

[別解]

(1) $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$

$\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$

$\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)n}$

$b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと $b_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$

$b_{n+1}=b_n$

$\{b_n\}$は初項 $b_1=\frac{1}{2}$ の定数列より

$b_n=\frac{1}{2}$

$b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$ より

$a_n=n(n+1)b_n=\frac{n(n+1)}{2}$ //

<point>

1. 2項間漸化式(階比型)

[3]

$a_{n+1}=2a_n-3$ 　　　$\alpha=2\alpha-3$ 　$\therefore\alpha=3$

$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$

$\{a_n-3\}$は初項 $a_1-3=1$ 公比2の等比数列より

$a_n-3=2^{n-1}$

$\therefore a_n=2^{n-1}+3$ //

<point>

1. 2項間漸化式(基本形)

[4]

(1) $a_{n+1}=2a_n+n \cdots ①$

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$ と変形する

$a_{n+1}=2a_n+\alpha n-\alpha+\beta \cdots ②$

①, ②より

$\begin{cases}\alpha=1\\ -\alpha+\beta=0\end{cases}$ 　　$\therefore \alpha=1,\ \beta=1$

$a_{n+1}+(n+1)+1=2(a_n+n+1)$

$\{a_n+n+1\}$は初項 $a_1+2=3$

公比2の等比数列より

$a_n+n+1=3\cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1$ //

(2) $a_{n+1}=2a_n-n^2+n \cdots ①$

$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=2(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma)$

と変形する

$a_{n+1}=2a_n+\alpha n^2+(-2\alpha+\beta)n-\alpha-\beta+\gamma \cdots ②$

①, ②より

$\begin{cases}\alpha=-1\\ -2\alpha+\beta=1\\ -\alpha-\beta+\gamma=0\end{cases}$ $\therefore \alpha=-1,\ \beta=-1,\ \gamma=-2$

$a_{n+1}-(n+1)^2-(n+1)-2=2(a_n-n^2-n-2)$

$\{a_n-n^2-n-2\}$は初項 $a_1-4=-1$

公比2の等比数列より

$a_n-n^2-n-2=-1\cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n=-2^{n-1}+n^2+n+2$ //

5

$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$

両辺 3^{n+1} で割って

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_1=\dfrac{a_1}{3}=1$

$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+1$ 　　　$\alpha=\dfrac{2}{3}\alpha+1$

$b_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(b_n-3)$ 　　　$\therefore \alpha=3$

$\{b_n-3\}$は初項 $b_1-3=-2$

公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列より

$b_n-3=-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore b_n=-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+3$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より

$a_n=3^n b_n$

$=3^n\left\{-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+3\right\}$

$=-3\cdot 2^n+3^{n+1}$ //

6

$a_{n+1}=8a_n^2,\ a_1=5$ より $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$

両辺底が2の対数をとって

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8a_n^2$

$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+3$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと $b_1=\log_2 a_1=\log_2 5$

$b_{n+1}=2b_n+3$ 　　　$\alpha=2\alpha+3$

$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$ 　　　$\therefore \alpha=-3$

$\{b_n+3\}$は初項 $b_1+3=\log_2 5+3=\log_2 40$.

公比2の等比数列より

$b_n+3=(\log_2 40)\cdot 2^{n-1}$

$\therefore b_n=(\log_2 40)\cdot 2^{n-1}-3$

$b_n=\log_2 a_n$ より

$a_n=2^{b_n}$

$=2^{(\log_2 40)\cdot 2^{n-1}-3}$

$=\dfrac{2^{(\log_2 40)\cdot 2^{n-1}}}{8}=\dfrac{40^{2^{n-1}}}{8}=5\cdot 40^{2^{n-1}-1}$ //

7

(1) $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+3}\ (n=2,3,\cdots)$

$a_n=0$ とすると $a_{n-1}=0$ より

$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$

となり矛盾

よって $a_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$

両辺逆数をとって

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+2$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと $\left(b_1=\dfrac{1}{a_1}=1\right)$

$b_{n+1}=3b_n+2$ 　　　$\alpha=3\alpha+2$

$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ 　　　$\therefore \alpha=-1$

$\{b_n+1\}$は初項 $b_1+1=\boxed{2}$

公比 $\boxed{3}$ の等比数列より

$b_n+1=2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ より

$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\boxed{\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}}$

(2) $a_n - 3a_{n-1} + 6a_na_{n-1} = 0$ $(n=2,3,\cdots)$

$a_n=0$ とすると $a_{n-1}=0$ より

$a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=0$

となり矛盾.

よって $a_n \neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$

両辺 a_na_{n+1} で割って

$$\frac{1}{a_n} - \frac{3}{a_{n+1}} + 6 = 0$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n} + 2$$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$

$$b_{n+1} = \boxed{\frac{1}{3}}\,b_n + \boxed{2}$$

$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + 2$

$\therefore \alpha = 3$

$$b_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(b_n - 3)$$

$\{b_n - \boxed{3}\}$ は初項 $b_1 - 3 = -2$

公比 $\boxed{\frac{1}{3}}$ の等比数列より

$$b_n - 3 = -2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$b_n = \frac{1}{a_n}$ より

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \boxed{\frac{3^{n-1}}{3^n-2}}$$

[8]

(1) $a_{n+1} = \frac{7a_n+3}{a_n+5}$

$b_n = a_n - k$ $(a_n = b_n + k)$ とおくと

$$b_{n+1} + k = \frac{7(b_n+k)+3}{b_n+k+5}$$

$$b_{n+1} = \frac{7b_n+7k+3-k(b_n+k+5)}{b_n+k+5}$$

$$= \frac{(7-k)b_n - k^2+2k+3}{b_n+k+5}$$

$-k^2+2k+3=0$

$k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$

$k>0$ より $k=3$

このとき

$$b_{n+1} = \frac{4b_n}{b_n+8}$$

$\alpha = 4,\ \beta = 8$ //

(2) $b_1 = a_1 - k = 7-3 = 4$

$$b_n = \frac{4b_{n-1}}{b_{n-1}+8}$$

$b_n = 0$ とすると $b_{n-1}=0$

$b_n = b_{n-1} = \cdots = b_1 = 0$

となり矛盾

よって $b_n \neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$

両辺逆数をとって

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{b_n} + \frac{1}{4}$$

$c_n = \frac{1}{b_n}$ とおくと $c_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{4}$

$$c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{4}$$

$\alpha = 2\alpha + \frac{1}{4}$

$\therefore \alpha = -\frac{1}{4}$

$$c_{n+1} + \frac{1}{4} = 2\left(c_n + \frac{1}{4}\right)$$

$\{c_n + \frac{1}{4}\}$ は初項 $c_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

公比 2 の等比数列より

$$c_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore c_n = 2^{n-2} + \frac{1}{4}$$

$c_n = \frac{1}{b_n}$ より

$$b_n = \frac{1}{c_n} = \frac{4}{2^n+1}$$

$b_n = a_n - 3$ より

$$a_n = b_n + 3$$

$$= \frac{4}{2^n+1} + 3$$

$$= \frac{4+3(2^n+1)}{2^n+1} = \frac{3\cdot 2^n+7}{2^n+1}$$ //

[9]

$x = \frac{2x+1}{x+2}$ より

$x(x+2) = 2x+1$

$x^2 = 1$ $\therefore \alpha = \boxed{-1},\ \beta = \boxed{1}$

$b_n = \frac{a_n+1}{a_n-1}$ とおくと $b_1 = \frac{a_1+1}{a_1-1} = 3$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}$$

$$= \frac{\frac{2a_n+1}{a_n+2}+1}{\frac{2a_n+1}{a_n+2}-1}$$

$$= \frac{3(a_n+1)}{a_n-1} = 3b_n$$

$\{b_n\}$は初項 $b_1=\boxed{3}$
公比 $\boxed{3}$ の等比数列より

$b_n=3\cdot 3^{n-1}$

$\therefore b_n=\boxed{3^n}$

$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ より

$b_n(a_n-1)=a_n+1$

$(b_n-1)a_n=b_n+1$

$b_n\neq 1$ より

$a_n=\dfrac{b_n+1}{b_n-1}=\boxed{\dfrac{3^n+1}{3^n-1}}$

10

(1) i) $n=1$ のとき

$a_1=7>3$ より成り立つ

ii) $n=k\ (k=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_k>3$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$a_{k+1}=\dfrac{4a_k-9}{a_k-2}$

$=4-\dfrac{1}{a_k-2}>3$

より成り立つ

i), ii) から数学的帰納法より
題意は示された

(2) $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}-3}$

$=\dfrac{1}{\frac{4a_n-9}{a_n-2}-3}$

$=\dfrac{a_n-2}{a_n-3}$

$=\dfrac{1}{a_n-3}+1$

$=b_n+1$ //

$b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=\dfrac{1}{4}$

(3) $\{b_n\}$は初項 $b_1+1=\dfrac{5}{4}$

公差1の等差数列より

$b_n=\dfrac{5}{4}+1\cdot(n-1)=n+\dfrac{1}{4}$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ より

$a_n=\dfrac{1}{b_n}+3=\dfrac{1}{n+\frac{1}{4}}+3$

$=\dfrac{4+3(4n+1)}{4n+1}=\dfrac{12n+7}{4n+1}$ //

11

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1,2$

・$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_{n+1}-a_n\}$は初項 $a_2-a_1=2$
公比2の等比数列より

$a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1}$

$=2^n\cdots①$

・$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$

$\{a_{n+1}-2a_n\}$は初項 $a_2-2a_1=-1$
の定数列より

$a_{n+1}-2a_n=-1\cdots②$

①−②より

$a_n=2^n+1$ //

<point>

1. 3項間漸化式

12

(1) $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$

$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$\therefore x=3$

$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

$\{a_{n+1}-3a_n\}$は初項 $a_2-3a_1=3$
公比3の等比数列より

$a_{n+1}-3a_n=3\cdot 3^{n-1}$

$\therefore b_n=3^n$ //

(2) $a_{n+1}=3a_n+3^n$

両辺 3^{n+1} で割って

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと $c_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$

$c_{n+1}=c_n+\dfrac{1}{3}$

$\{c_n\}$は初項 $c_1=\dfrac{1}{3}$
公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列より

$c_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n}{3}$ //

$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より $a_n=3^n c_n=n\cdot 3^{n-1}$ //

<point>

1. 3項間漸化式(特性方程式重解型)

13

(1) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=1$ より

$x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0$
∴ $x=2$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと $b_1=a_2-a_1=2$.

$b_{n+1}=2b_n+1$.

$\alpha=2\alpha+1$
∴ $\alpha=-1$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=3$ 公比 2 の等比数列より

$b_n+1=3\cdot2^{n-1}$

∴ $b_n=3\cdot2^{n-1}-1$ //

(2) $b_n=a_{n+1}-2a_n$ より

$a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}-1$

$a_{n+1}=2a_n+3\cdot2^{n-1}-1$

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

$c_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと $c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$

$$c_{n+1}=c_n+\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

$=d_n$ とおく

$$∴ c_{n+1}-c_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k \quad (n\geqq2)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)-\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{4}(n-1)$$

これは $n=1$ のときも成り立つので

$$c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{4}(n-1) \quad (n\geqq1)$$

$c_n=\frac{a_n}{2^n}$ より

$$a_n=2^nc_n$$

$$=\frac{3\cdot2^n}{4}(n-1)+1$$

$$=3(n-1)\cdot2^{n-2}+1 \ //$$