基本問題演習 22. 場合の数(2)

[1]

男子がちょうど3人選ばれるのは

$$_6C_3\times{}_3C_1=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times3=60\text{ 通り}$$

女子が少なくとも1人選ばれるのは

$$\underset{\text{全体}}{_9C_4}-\underset{\text{全部男}}{_6C_4}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$=126-15=111\text{ 通り}$$

<point>

1. 組合せ

[2]

I.(ア) $6\times10=\boxed{60}$ 個

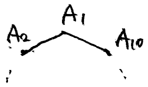
(イ) 1辺も共有しない = 全体 − 辺を共有する

$$={}_{10}C_3-(\underset{\text{1辺共有}}{60}+\underset{\text{2辺共有}}{10})$$

$$=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}-70=\boxed{50}\text{ 個}$$

(ウ) $4\times10=\boxed{40}$ 個

A1を頂角とする

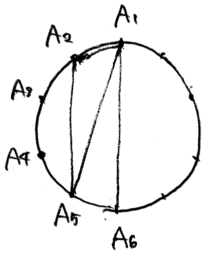


(エ) A1を鋭角の1つとする鈍角三角形は

$_4C_2\times2=12$ 個

鋭角が2つあることに注意して

$$\frac{12\times\overset{A_1\sim A_{10}}{10}}{2}=\boxed{60}\text{ 個}$$



(オ) 正十角形の2頂点と外接円の中心を通る直線を対称軸とする台形は

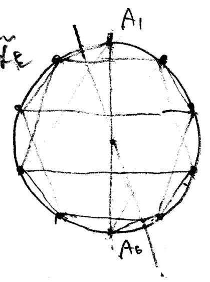
$4\times5=20$ 個

1辺の中点と対辺の中点を結ぶ直線を対称軸とする台形は

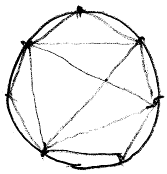
$8\times5=40$ 個

よって

$20+40=\boxed{60}$ 個



II.(1) $_7C_2-7=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}-7=14$ 個



(2) $_{14}C_2=\frac{14\cdot13}{2\cdot1}=91$ 通り

(3) $_4C_2\times7=42$ 組

(4) 正七角形内で共有点をもつとき、その共有点は7つの頂点から4個をえらんでできる四角形の対角線の交点であるから

$$_7C_4=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35\text{ 組}$$

よって共有点をもたないのは

$91-(42+35)=14$ 組

(5) 35組

[3]

I(1) 1〜6から4個の数字を選んで小さい方から順に a_1,a_2,a_3,a_4 とすればよいから

$$_6C_4=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=\boxed{15}\text{ 通り}$$

(2) 1〜6から重複を許して4個の数字を選んで大きくない方から順に a_1,a_2,a_3,a_4 とすればよいから

○4個 |5個の並べ方に等しいから

$$\frac{9!}{4!5!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\boxed{126}\text{ 通り}$$

(3) $(a_1\leqq a_2<a_3\leqq a_4)=(a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4)-(a_1\leqq a_2=a_3\leqq a_4)$ ○3個 |5個

$$=126-\frac{8!}{3!5!}$$

$$=126-\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=\boxed{70}\text{ 通り}$$

II(1) ○9個 |2個の並べ方に等しいから

$$\frac{11!}{9!2!}=\frac{11\cdot10}{2\cdot1}=55\text{ 個}$$

(2) $x+y+z\leqq9$ を満たす (x,y,z) の組の総数は $x+y+z+w=9,\ x,y,z,w\geqq0$ を満たす (x,y,z,w) の組の総数に等しいから

$$\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220\text{ 個}$$

(3) x,y,z がすべて等しいのは4通り

のうち2つが等しいのは

$26\times3=78$ 通り

(0,0,□)→9通り
(1,1,□)→7通り
(2,2,□)→5 〃
(3,3,□)→3 〃
(4,4,□)→2 〃 (+
26通り

よって

$220-(4+78)=138$ 個

<point>

1. 重複組合せ

[4]

(1) I. $3^6 = \boxed{729}$ 通り

II. $3^6 - {}_3C_2 \times (2^6 - 2) - 3 = \boxed{540}$ 通り

2部屋に集中　　1部屋に集中

(2) I. ○6個 |2個の並べ方に等しいから

$\frac{8!}{6!2!} = \boxed{28}$ 通り

II |2個を用意して各部屋に○を1つずつ入れ
残り3個をどのように入れるかであるから
○3個, |2個の並べ方に等しい。

よって

$\frac{5!}{3!2!} = \boxed{10}$ 通り

(3) I. $3 \times \frac{7!}{5!2!} = \boxed{63}$ 通り

II. $3 \times \frac{5!}{3!2!} = \boxed{90}$ 通り

●|○|○
○|●|○
○|○|●

<point>

1. 組分けた〜ものが区別できるかできないか

[5]

I. (1) $6 \times {}_5C_2 = 60$ 通り

(2) $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} = 15$ 通り

(3)

	組を区別する	区別しない
3部屋に分散	①	④
2部屋に集中	②	⑤
1部屋に集中	③	⑥
計	3^6	

A　B　C
ⓐ　ⓑ

これが答え。

① $3^6 - {}_3C_2(2^6-2) - 3 = 540$ 通り　　④ $\frac{540}{3!} = 90$ 通り

② ${}_3C_2 \times (2^6 - 2) = 186$ 通り　　⑤ $\frac{186}{3!} = 31$ 通り

③ 3 通り　　⑥ $\frac{3}{3} = 1$ 通り

よって

$90 + 31 + 1 = 122$ 通り

6人を組分けする

II. (1) ${}_9C_2 \times {}_7C_3 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1260$ 通り

(2) $\frac{{}_9C_3 \times {}_6C_3}{3!} = \frac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{3!} = 280$ 通り

(3) [男2 女1] [男2 女1] [男1 女2]

区別がつかない

$\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2 \times 4 \times 3}{2!} = 180$ 通り

<point>

[6] 1. 組分けた〜組が区別できるかできないか

(1) ○6個 |2個の並べ方に等しいから

$\frac{8!}{6!2!} = 28$ 通り

(2)

	組を区別する	区別しない
全部個数がちがう	①	④
2つだけ個数が等しい	②	⑤
すべて個数が等しい	③	⑥
計	28	

(0, 0, 6)
(1, 1, 4)
(2, 2, 2) ×
(3, 3, 0)

③ 1　　⑥ 1
② 9 $\xleftarrow{\times 3}$ ⑤ 3
① 18 $\xrightarrow{\div 6}$ ④ 3

よって

$1 + 3 + 3 = 7$ 通り

(3) $(0, 0, 6m)$
$(1, 1, 6m-2)$
⋮
$(3m, 3m, 0)$　　$3m+1$ 通り

(4) (2)と同様にして

③ 1　　⑥ 1
② $9m$ $\xleftarrow{\times 3}$ ⑤ $3m$
① $\xrightarrow{\div 6}$ ④ $3m^2$

全体 $\frac{(6m+2)!}{(6m)!2!} = (3m+1)(6m+1)$
$= 18m^2 + 9m + 1$

$18m^2 + 9m + 1 - 9m - 1 = 18m^2$

よって

$3m^2 + 3m + 1$ 通り

<point>

1. 組分けた〜組を区別するかしないか

[7]

$(x+1)^8(x-1)^4=(x+1)^4(x^2-1)^4$

$=({}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3+{}_4C_2x^2+{}_4C_3x+{}_4C_4)$

$({}_4C_0x^8-{}_4C_1x^6+\cdots)$ より

x^{10}の係数は

${}_4C_2\times{}_4C_0-{}_4C_0\times{}_4C_1=6\times1-1\times4=\boxed{2}$

$(x^2+x+1)^6$ の x^{10} の係数は

	かける回数	
x^2	5	4
x	0	2
1	1	0
計	6	

$\dfrac{6!}{5!1!}+\dfrac{6!}{4!2!}=6+15=\boxed{21}$

<point>

1. 二項定理
2. 多項定理

[8]

(1) $101^{100}=(100+1)^{100}$

$={}_{100}C_0100^{100}+\cdots+{}_{100}C_3100^3+\underset{\overset{\|}{50\times99}}{{}_{100}C_2}100^2$

$+{}_{100}C_1100+{}_{100}C_0\cdot1$

$=100^3N+49500000+10000+1$ より

(N:自然数)

下5桁は 10001 //

(2) $99^{100}=(100-1)^{100}$

$={}_{100}C_0100^{100}+\cdots+{}_{100}C_3100^3(-1)^{97}+{}_{100}C_2100^2$

$-{}_{100}C_1100+{}_{100}C_0\cdot1$

$=100^3N+49500000-10000+1$ より

(N:整数)

下5桁は 90001 //

$ {}_{1000}C_{997}\cdot10^3=\dfrac{1000\cdot999\cdot998}{3\cdot2\cdot1}\cdot10^3$

$\dfrac{1000\cdot999}{2\cdot1}\cdot10^2$

(3) $3^{2001}=3\cdot9^{1000}$

$=3(10-1)^{1000}$

$=3({}_{1000}C_010^{1000}+\cdots+{}_{1000}C_{998}10^2+{}_{1000}C_{999}10$

$+{}_{1000}C_{1000}1)$

$=3(10^5N+{}_{1000}C_{996}10^4-{}_{1000}C_{997}10^3$

(N:整数) $+{}_{1000}C_{998}10^2-{}_{1000}C_{999}10+{}_{1000}C_{1000}1)$

$=3(10^5N+\cdots50000-10000+1)$

(N:自然数) 40001

下5桁は 20003 //

[9]

(1) 与式に $x=-1$ を代入して

${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$ //

(2) 与式の両辺を x で微分して

${}_nC_1+2{}_nC_2x+\cdots+n{}_nC_nx^{n-1}=n(1+x)^{n-1}$

$x=1$ を代入して

${}_nC_1+2{}_nC_2+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot2^{n-1}$ //

[別解]

$r{}_nC_r=r\cdot\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!\underbrace{(n-r)}_{(n-1)-(r-1)}!}$

$=n{}_{n-1}C_{r-1}$ より

左辺 $=n{}_{n-1}C_0+n{}_{n-1}C_1+\cdots+n{}_{n-1}C_{n-1}$

$=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$

$=n\cdot2^{n-1}$ //

(3) ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$ …①

${}_nC_1+2{}_nC_2+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot2^{n-1}$ …② ←(2)

①+② より

${}_nC_0+2{}_nC_1+\cdots+(n+1){}_nC_n=2^n+n\cdot2^{n-1}$

$=(n+2)\cdot2^{n-1}$ //

[10]

(1) $r{}_pC_r=r\cdot\dfrac{p!}{r!(p-r)!}$

$=p\cdot\dfrac{(p-1)!}{(r-1)!\{(p-1)-(r-1)\}!}$

$=p{}_{p-1}C_{r-1}$ // より

$r{}_pC_r$ は p の倍数であり

p と r は互いに素であるから

${}_pC_r$ は p の倍数である //

(2) $2^p=(1+1)^p$

$={}_pC_0+\underbrace{{}_pC_1+\cdots+{}_pC_{p-1}}_{p\text{の倍数}}+{}_pC_p$

$=Np+2$ (N:整数)

$p=2$ のとき 余りは 0

$p\geqq3$ 〃 2 //