

## 高2数学 基本問題演習 16. 指数・対数関数

1 [1999 東京薬科大]

$a = 125000$  のとき、 $\frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}} = \square \times \sqrt{2}$  である。

2 [2000 東京薬科大]

- (1) 3つの数  $a = 2^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = 3^{\frac{1}{3}}$ ,  $c = 5^{\frac{1}{5}}$  の大小を答えよ。
- (2)  $2^x = 3^y = 5^z$  (ただし,  $x, y, z$  は正の実数) のとき,  $2x, 3y, 5z$  の大小を答えよ。

3 [I. 2021 広島工業大 II. 2008 倉敷芸術科学大]

I.  $a$  は定数とする。関数  $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 3a + 2$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 方程式  $f(x) = 0$  が2つの異なる解をもつように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。
- (2) 方程式  $f(x) = 0$  が2つの異なる正の解をもつように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。
- (3) 方程式  $f(x) = 0$  が正の解と負の解をそれぞれ1つずつもつように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

II.  $x$  についての方程式  $4^x - a^2 \cdot 2^x + 2a^2 + 4a - 6 = 0$  が正の解と負の解をそれぞれ1つずつもつとき、定数  $a$  の範囲を求めよ。

4 [2003 大阪教育大]

実数  $x$  に対して、 $t = 2^x + 2^{-x}$ ,  $y = 4^x - 6 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{-x} + 4^{-x}$  とおく。

- (1)  $x$  が実数全体を動くとき、 $t$  の最小値を求めよ。
- (2)  $y$  を  $t$  の式で表せ。
- (3)  $x$  が実数全体を動くとき、 $y$  の最小値を求めよ。
- (4)  $a$  を実数とするとき、 $y = a$  となるような  $x$  の個数を求めよ。

5 [(1) 2009 首都大学東京 (2) 2002 東北学院大]

- (1)  $3^x = a$ ,  $12^y = a$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$  を満たす実数  $x, y$  が存在するような  $a$  の値を求めよ。
- (2) 正の数  $a, b, c$  と0でない数  $x, y, z$  が  $a^x = b^y = c^z$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$  を満たしているとき、 $a, b, c$  の間に成り立つ関係式を求めよ。

## 高2数学 基本問題演習 16. 指数・対数関数

6 [ I . 2004 神戸薬科大 II . 2004 法政大 ]

I.  $1 < a < b < a^2$  のとき、次の4つの値を小さい方から順に並べよ.

$$x = \log_a b, \quad y = \log_b a, \quad z = \log_a ab, \quad w = \log_b \frac{b}{a}$$

II. 正の数  $a, b$  に対して  $p = \frac{\log_{10} a + \log_{10} b}{2}$ ,  $q = \log_{10} \frac{a+b}{2}$ ,  $r = \frac{\log_{10}(a+b)}{2}$  と

おく. ただし,  $a \neq b$  とする.

- (1)  $p < q$  が成り立つことを証明せよ.
- (2)  $a > 2, b > 2$  のとき,  $p, q, r$  を小さい方から順に並べよ.

7 [ I . 2015 三重大 II . 2022 関西学院大 ]

I. (1)  $a, b, c$  は正の実数で,  $a \neq 1, c \neq 1$  とするとき,  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  となること

を, 対数の定義に基づいて証明せよ. ただし, 必要ならば,  $\log_p M^r = r \log_p M$  ( $p > 0, p \neq 1, M > 0, r$  は実数) を用いてよい.

- (2) 方程式  $\log_4(x+3) = \log_2 x - 1$  を解け.
- (3) 方程式  $\log_4(x+k) = \log_2 x - 1$  が解をもつような実数  $k$  の範囲を求めよ.

II.  $a$  は1でない正の定数とする.

$$\log_a(x+4) + \log_a(x-2) > \log_a(7x-2)$$

を満たす  $x$  の範囲は,  $a > 1$  ならば  $\boxed{\phantom{00}}$  であり,  $0 < a < 1$  ならば  $\boxed{\phantom{00}}$  である.

8 [2023 高知大]

$x, y$  は正の実数で,  $x \neq 1, y \neq 1$  とする.

- (1)  $\log_x y > 0$  であるための,  $x$  と  $y$  に関する必要十分条件を求めよ.
- (2) 次の不等式の表す領域を  $xy$  平面上に図示せよ.

$$\log_x y - 2 \log_y x > 1$$

## 高2数学 基本問題演習 16. 指数・対数関数

9 [2009 京都薬科大]

$\log_{10}2 = 0.3010$ ,  $\log_{10}3 = 0.4771$  とする。

(1)  $\log_{10}4 = \overset{ア}{\square}$ ,  $\log_{10}5 = \overset{イ}{\square}$ ,  $\log_{10}6 = \overset{ウ}{\square}$  となる。

ただし、小数第4位まで答えよ。

(2) 大小関係  $48 < 49 < 50$  より、 $\log_{10}7 = \overset{エ}{\square}$  となる。

ただし、 $\log_{10}7$  の値の小数第3位以下を切り捨て、小数第2位まで答えよ。

(3) 自然数  $n$  の7乗が7桁の数であるとき、 $n$  の値の範囲は、 $\overset{オ}{\square} \leq n \leq \overset{カ}{\square}$

である。

(4)  $18^{50}$  は、 $\overset{キ}{\square}$  桁の整数であり、また、最高位の数字は  $\overset{ク}{\square}$  で、一の位の数字は  $\overset{ケ}{\square}$  である。

10 [I. 1997 共立薬科大 II. 2015 星薬科大 III. 2005 南山大]

I.  $\log_{10}2 = 0.3010$ ,  $\log_{10}3 = 0.4771$  とするとき

(1)  $3^n$  が11桁の整数となる自然数  $n$  の値を求めよ。

(2)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$  を小数で表すと、小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。

II. 自然数  $n$  に対して  $3^n$  の値が27桁で、最高位の数字が5で始まる時、 $n = \square$

である。ただし、 $\log_{10}2 = 0.3010$ ,  $\log_{10}3 = 0.4771$  とする。

III.  $a, b, c$  は正の整数であり、 $a^2b$  は7桁の整数、 $\frac{b^2}{c^8}$  は小数で表すと小数第10位に

初めて0でない数字が現れる数である。このとき、 $ac^2$  は  $\overset{ア}{\square}$  桁の整数であり、

$\frac{ab\sqrt{b}}{c^4}$  は小数で表すと小数第  $\overset{イ}{\square}$  位に初めて0でない数字が現れる数である。

11 [2007 京都教育大]

(1)  $2^m = 3^n$  を満たす自然数  $m, n$  は存在しないことを示せ。

(2)  $\log_2 3$  は無理数であることを証明せよ。