基本問題演習 8 高次方程式

[1]

(1) $\alpha^3 = \sqrt{\frac{28}{27}}+1-3\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}+1}$
$+3\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{28}{27}}-1}-\left(\sqrt{\frac{28}{27}}-1\right)$

$=-\alpha+2$

$\therefore \alpha^3+\alpha-2=0$

よってαは $x^3+x-2=0$ の解であるから
題意は示された //

(2) $x^3+x-2=0$

1	1	0	1	−2
		1	1	2
	1	1	2	0

$(x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ の判別式をDとすると
$D=1-8=-7<0$ より虚数解をもつ
αは実数より $\alpha=1$ //

<point>

1. カルダノの公式（3次方程式の解の公式）

[2]

(1) $P(x)=x^3+(a-5)x^2+(a+8)x-6a-4$ とおく
$P(2)=0$ より
$P(x)=0$ は a の値に関わらず $x=2$ を解にもつ

(2) $x^3+(a-5)x^2+(a+8)x-6a-4=0$

$(x-2)\{x^2+(a-3)x+3a+2\}=0.$

2	1	a−5	a+8	−6a−4
		2	2a−6	6a+4
	1	a−3	3a+2	0

i) $x^2+(a-3)x+3a+2=0$ が
$x=2$ を解にもつとすると
$5a=0$ $\therefore a=0$
このとき
$x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1,2.$

ii) $x^2+(a-3)x+3a+2=0$ が
重解をもつとすると 判別式をDとして
$D=(a-3)^2-4(3a+2)$
$=a^2-18a+1=0$ $\therefore a=9\pm4\sqrt{5}$
このとき重解は $x=\frac{6\pm4\sqrt{5}}{2}=3\pm2\sqrt{5}$

i), ii) より

$a=0,\ 3\pm2\sqrt{5}$ //

<point>

1. 3次方程式の解の判別.

[3]

解と係数の関係より
$\alpha+\beta+\gamma=$ ア $\boxed{-2}$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$ イ $\boxed{-3}$

$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}=\frac{(1-\beta)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\gamma)+(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$

$=\frac{3-2(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$

ここで
$x^3+2x^2-3x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$x=1$ を代入して
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1$
より
与式 $=3+4+3=$ ウ $\boxed{10}$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=4+6=$ エ $\boxed{10}$

αは $x^3+2x^2-3x+1=0$ の解より
$\alpha^3+2\alpha^2-3\alpha+1=0$
$\therefore \alpha^3=-2\alpha^2+3\alpha+1$

よって
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+3(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=-20-6+3=$ ウ $\boxed{-23}$

[別解]
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

<point>

1. 解と係数の関係（3次方程式）

4

(1) 解と係数の関係より

$a = -(\alpha+\beta+\gamma)$ …①

$b = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ …②

$c = -\alpha\beta\gamma$ …③

(2) α, β, γ がすべて整数であるとする。

(i) a：偶数、b, c：奇数とすると

③より α, β, γ はすべて奇数

①より a が偶数であることに矛盾

(ii) b：偶数、a, c：奇数とすると

③より α, β, γ はすべて奇数

②より b が偶数であることに矛盾

(iii) c：偶数、a, b：奇数とすると

③より α, β, γ のうち少なくとも1つが偶数

偶数が1つのとき ①より a が偶数となり矛盾

2　　② 〃 b 〃

3　　①　a

(i)〜(iii)より 題意は示された

5

(1) $x^2 - ax + 1 = 0$ …①

(2) (1)の方程式の2解を α, β とすると

$\begin{cases} \alpha+\beta = a \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$

①の判別式をDとすると

題意を満たすとき

$D>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

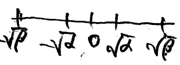
$a^2-4>0,\ a>0,\ 1>0$

$\therefore a>2$ 〃

(3) (1)が異なる4つの実数解をもつとき、$a>2$

$(0<)\alpha<\beta$ とすると 4つの実数解は

$-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$



これが等差数列になればよいから

$2\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$

$3\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}$　　$\therefore \beta = 9\alpha$

$\alpha\beta = 1$ より

$9\alpha^2 = 1$　　$\therefore \alpha = \frac{1}{3},\ \beta = 3$

よって

$a = \frac{10}{3}$、4つの解は $-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}$ 〃

6

$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=0$

$x \neq 0$ であるから 両辺 x^2 で割って

$x^2+\frac{1}{x^2}+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+31=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+29=0$

$y = x+\frac{1}{x}$ とおくと

$y^2+\boxed{11}y+\boxed{29}=0$

これを解くと　　121−116

$y = \frac{-11\pm\sqrt{5}}{2}$

$x+\frac{1}{x} = \frac{-11\pm\sqrt{5}}{2}$

$2x^2-(-11\pm\sqrt{5})x+2=0$

$2x^2-(-11+\sqrt{5})x+2=0$ の2解を α, β

$2x^2-(-11-\sqrt{5})x+2=0$ 〃 γ, δ とすると

$\alpha+\beta = \frac{-11+\sqrt{5}}{2},\ \alpha\beta = 1$

$\gamma+\delta = \frac{-11-\sqrt{5}}{2},\ \gamma\delta = 1$

よって

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$

$= \alpha+\beta+\gamma+\delta = -11$ 〃

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$= \frac{16-22\sqrt{5}}{4}-2+\frac{16+22\sqrt{5}}{4}-2$

$= 4$ 〃

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)$

$= (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\}+(\gamma+\delta)\{(\gamma+\delta)^2-3\}$

$= \frac{-11+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2-11\sqrt{5}}{2}+\frac{-11-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2+11\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{-77+123\sqrt{5}}{4}+\frac{-77-123\sqrt{5}}{4}$

$= -\frac{154}{4} = -\frac{77}{2}$ 〃

<point>

1. 相反方程式

7

$(x^2+a)^2-(bx+c)^2=x^4+2ax^2+a^2-(b^2x^2+2bcx+c^2)$

$=x^4+(2a-b^2)x^2-2bcx+a^2-c^2$

より

$\begin{cases} 2a-b^2={}^{ア}-\boxed{5} \cdots ① \\ -2bc=-6 \quad \therefore bc={}^{イ}\boxed{3} \cdots ② \\ a^2-c^2={}^{ウ}\boxed{3} \cdots ③ \end{cases}$

②より $c=\frac{3}{b}$

③より

$a^2-\frac{9}{b^2}=3$

$a^2-\frac{9}{2a+5}=3$

$(a^2-3)(2a+5)-9=0$

$2a^3+5a^2-6a-24=0$

2	2	5	−6	−24
		4	18	24
	2	9	12	0

$(a-2)(2a^2+9a+12)=0$

$a=2$のとき

$b^2=\boxed{9}$, $c^2=\boxed{1}$

$\therefore (b,c)=(3,1),(-3,-1)$ (②より)

$(x^2+a)^2-(bx+c)^2$

$=\{(x^2+a)+(bx+c)\}\{(x^2+a)-(bx+c)\}$

$=(x^2+bx+a+c)(x^2-bx+a-c)$ より

どちらの場合も

$(x^2+3x+3)(x^2-3x+1)=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ //

<point>

1. フェラーリの方法.

8

−1	1	−(a+2)	2a−3	3a
		−1	a+3	−3a
	1	−a−3	3a	0

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a-3)x+3a$ とおく

$f(-1)=-1-a-2-2a+3+3a=0$ より

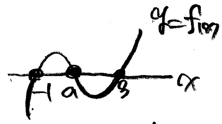
$=(x+1)\{x^2+(-a-3)x+3a\}$

$=(x+1)(x-3)(x-a)$

$(x+1)(x-3)(x-a)\leqq 0$

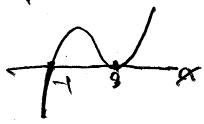
i) $0<a<3$ のとき

$x\leqq -1$, $a\leqq x\leqq 3$



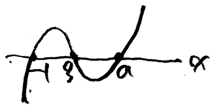
ii) $a=3$ のとき

$x\leqq -1$, $x=3$



iii) $a>3$ のとき

$x\leqq -1$, $3\leqq x\leqq a$ //



<point>

1. 高次不等式.