基本問題演習 18. 数列②

[1]

(1) $\dfrac{1}{m(m+1)} = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}$ (部分分数分解)

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{m(m+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2}\right)$$
$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+2)} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m(m+1)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}\right)$$
$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)(m+2)} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m(m+1)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{18}{m(m+1)(m+2)(m+3)} = 6\left(\frac{1}{m(m+1)(m+2)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}\right)$$
$$\sum_{m=1}^{9}\frac{18}{m(m+1)(m+2)(m+3)} = 6\sum_{m=1}^{9}\left(\frac{1}{m(m+1)(m+2)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}\right)$$
$$= 6\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10\cdot 11\cdot 12}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{220} = \frac{219}{220}$$

(2) $\dfrac{4n+3}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n(n+1)} + \dfrac{b}{(n+1)(n+2)}$ とおく

$4n+3 = a(n+2)+bn$
$\quad = (a+b)n + 2a$

これが任意のnで成り立つとき

$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a=3 \end{cases}$ $\quad \therefore a = \dfrac{3}{2},\ b = \dfrac{5}{2}$

$$S_n = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} + \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{11}{4} - \frac{3}{2(n+1)} - \frac{5}{2(n+2)}$$
$$= \frac{11}{4} - \frac{3(n+2)-5(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{11}{4} + \frac{2n-1}{2(n+1)(n+2)}$$

[別解]
$\dfrac{4n+3}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{4}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{3}{n(n+1)(n+2)}$ として計算してもよい

(3) $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = -\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$
$$= -\left\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{N-1}-\sqrt{N})+(\sqrt{N}-\sqrt{N+1})\right\}$$
$$= \sqrt{N+1} - 1$$

(4) $$\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\log_2(k+1) - \log_2 k\right)$$
$$= (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) + \cdots + (\log_2 n - \log_2(n-1)) + (\log_2(n+1) - \log_2 n)$$
$$= \log_2(n+1) = 10$$
$n+1 = 2^{10}$
$\therefore n = 1023$

[2]

(1) $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ …①
$xS_n = \quad x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$ …②

$x=0$ のとき $S_n = 1$
$x=1$ 〃 $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
$x \neq 0, 1$ のとき
①−②より
$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - nx^n$$
$$= \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n$$
$$\therefore S_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

(2) $x_k = 1+2(k-1) = 2k-1$

$y_k = 2^{k-1}$

$T_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{k-1}$

$= 2\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$

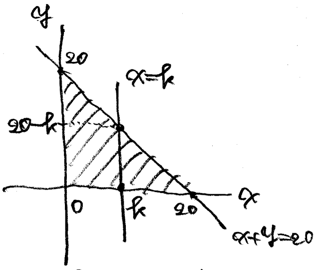
$= 2\{1-2^n+n\cdot 2^n\} - \frac{2^n-1}{2-1}$

$= (2n-2)\cdot 2^n + 2 - 2^n + 1$

$= (2n-3)\cdot 2^n + 3$ //

$\boxed{3}$

I.(1)



($k=0,1,\cdots,20$)

$x=k$ のとき、格子点の個数は

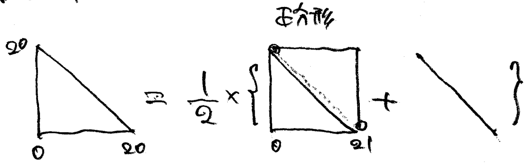
$20-k-0+1 = 21-k$

よって求める格子点の個数は

$\sum_{k=0}^{20}(21-k) = 21+20+\cdots+1$

$= \frac{21(21+1)}{2} = 231$ 個 //

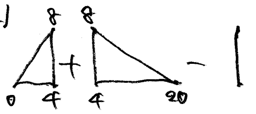
[別解]



$= \frac{1}{2}\times(21\times21+21)$

$= 231$ 個 //

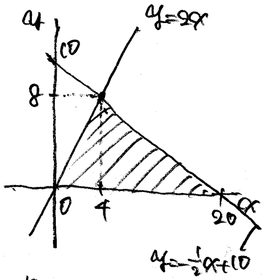
(2)



$= \frac{1}{2}\times(5\times9+5)$

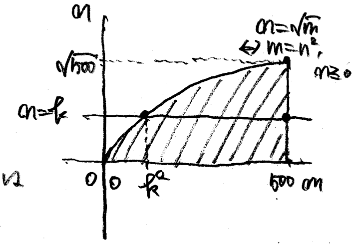
$+\frac{1}{2}\times(17\times9+9)-9$

$= 25+81-9 = 97$ 個 //



$5x=20$ より $x=4$

II.



$22<\sqrt{500}<23$

$\sqrt{484}$ 　 $\sqrt{529}$

$n=k$ のとき格子点の個数は

$500-k^2+1 = 501-k^2$

求める整数の組(m,n)の個数は

$\sum_{k=0}^{22}(501-k^2)$

$= 501\times23 - \frac{1}{6}\cdot22\cdot23\cdot45$

$= 23\times336 = 7728$ 個

<point>

1、格子点の個数

$\boxed{4}$

第7群の最後の項は

$1+2+\cdots+7 = \frac{7\cdot8}{2} = 28$ 第28項

よって第8群の最初の項は第29項より $\boxed{29}$

第n群の最後の項は 第$\frac{n(n+1)}{2}$項で

50は第50項であるから、

これが第n群の項であるとすると

$\frac{(n-1)n}{2}+1 \leqq 50 \leqq \frac{n(n+1)}{2}$

$(n-1)n+2 \leqq 100 \leqq n(n+1)$

$9\cdot10=90$, $10\cdot11=110$ より $n=10$

よって50は第$\boxed{10}$群の5番目の項である

第n群の最初の項は $\frac{(n-1)n}{2}+1$、

最後 $\frac{n(n+1)}{2}$ で

項数はn より

$S_n = \frac{n}{2}\left\{\frac{(n-1)n}{2}+1+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{n}{2}\left(\frac{2n^2}{2}+1\right) = \frac{n(n^2+1)}{2}$ //

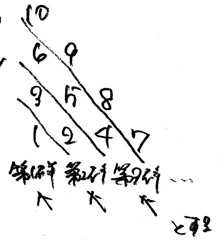
<point>

1、群数列

$\boxed{5}$

I. (1) $(0,n)$は第$n+1$群の最後の項であるから

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ //



(2) $(2,25)$は第28群の26番目の項より

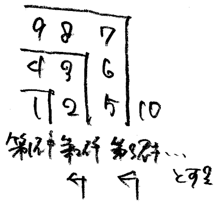
$$\frac{27\cdot\cancel{28}^{14}}{\cancel{2}}+26=404$$ //

(3) (m,n)は第$m+n+1$群の$n+1$番目の項より

$$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+n+1$$ //

II. (1) $a(1,k)$は第k群の最後の項であるから

$$1+3+5+\cdots+2k-1$$
$$=\frac{k(1+2k-1)}{2}=k^2$$ //



$a(j,1)$は第j群の最初の項であるから

$$(j-1)^2+1=j^2-2j+2$$ //

(2) (i) $j\geqq k$のとき

$a(j,k)$は第j群のk番目の項より

$$a(j,k)=(j-1)^2+k$$

(ii) $j<k$のとき

$a(j,k)$は第k群の$2k-1-(j-1)=2k-j$番目の項より

$$a(j,k)=(k-1)^2+2k-j=k^2-j+1$$ //

(3) 2007が第n群の項であるとすると

$$(n-1)^2+1\leqq 2007\leqq n^2$$

$44^2<2007<45^2$より 第45群

第44群の最後の項は $44^2=1936$より

2007は第45群の $2007-1936=71$番目

よって $j=89-71+1=19,\ k=45$ //

(4) $a(k,k)$は第k群のk番目の項より

$$(k-1)^2+k=k^2-k+1$$

$$\sum_{k=1}^{n}a(k,k)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)=\frac{1}{3}n(n^2+2)$$ //

<point>

1. 群数列(2次元数列)

$\boxed{6}$

(1) $a_1=15=3\cdot5$

$a_2=169+46=215=5\cdot43$

(2) (1)よりa_nすべてに共通する素因数が存在するならば5であることが必要。

a_nが5を素因数にもつことを示す $(n=1,2,\cdots)$

(i) $n=1$のとき

$a_1=15=3\cdot5$ より成り立つ

(ii) $n=k\ (k=1,2,\cdots)$のとき成り立つと仮定して

$a_k=5N$ (N:整数)

$n=k+1$のとき成り立つことを示す

$$a_{k+1}=13^{k+1}+2\cdot23^k$$
$$=13\cdot13^k+2\cdot23\cdot23^{k-1}$$
$$=13\cdot(13^k+2\cdot23^{k-1})+2\cdot10\cdot23^{k-1}$$
$$=13a_k+5\cdot4\cdot23^{k-1}$$
$$=13\cdot5N+5\cdot4\cdot23^{k-1}$$
$$=5(13N+4\cdot23^{k-1})$$

よって成り立つ

(i), (ii)から数学的帰納法より

題意は示された。

<point>

1. 数学的帰納法(1段階仮定)

$\boxed{7}$

(1) $a^2+b^2=16$より

$$(a+b)^2-2ab=16$$

$a^3+b^3=44$より

$$(a+b)^3-3ab(a+b)=44$$

$s=a+b,\ t=ab$とおくと

$$\begin{cases}s^2-2t=16 \cdots ①\\ s^3-3st=44 \cdots ②\end{cases}$$

①, ②より

$s^3-3s(\frac{1}{2}s^2-8)=44$

$-\frac{s^3}{2}+24s-44=0$

$s^3-48s+88=0$

$2 \mid 1 \quad 0 \quad -48 \quad 88$; $2 \quad 4 \quad -88$; $1 \quad 2 \quad -44 \mid 0$

$(s-2)(s^2+2s-44)=0$

$\therefore s=2, -1\pm3\sqrt5$ （$\sqrt5 \fallingdotseq 2.23$）

ここで、

$x^2-(a+b)x+ab=0$ すなわち

$x^2-sx+t=0$

は a, b を2解とする2次方程式であり

a, b は実数であるから、判別式を D とすると

$D\geqq0$ より

$s^2-4t\geqq0$

$s^2+2(-s^2+16)\geqq0$

$s^2\leqq32$ $\quad\therefore -4\sqrt2\leqq s\leqq4\sqrt2$ （$\sqrt2 \fallingdotseq 1.4$）

より

$a+b=2$. $(ab=-6)$

(2) i) $n=2, 3$ のとき

$a_2=16=4\cdot4$, $a_3=44=4\cdot11$ より成り立つ

ii) $n=k, k+1$ $(k=2,3,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a^k+b^k=4k_1$, $a^{k+1}+b^{k+1}=4k_2$ （k_1, k_2 は整数）

$n=k+2$ のとき成り立つことを示す

$a^{k+2}+b^{k+2}=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)$

$=2\cdot4k_1+6\cdot4k_2$

$=4(2k_1+6k_2)$

より成り立つ。

i), ii) から数学的帰納法より

題意は示された

〈point〉

1. 数学的帰納法（2段階仮定）

$\boxed{8}$

1) $a_1^2=a_1^3$

$a_1>0$ より $a_1=1$

$(a_1+a_2)^2=a_1^3+a_2^3$ より

$(1+a_2)^2=a_2^3+1$

$a_2^3-a_2^2-2a_2=0$

$a_2(a_2+1)(a_2-2)=0$

$a_2>0$ より $a_2=2$

$(a_3+3)^2=a_3^3+9$ より

$a_3^3-a_3^2-6a_3=0$

$a_3(a_3+2)(a_3-3)=0$

$a_3>0$ より $a_3=3$

$a_n=n$ と推定できる。

2) i) $n=1$ のとき

$a_1=1$ より成り立つ

ii) $n=1, 2, \cdots, k$ のとき成り立つと仮定して

$a_l=l$ $(l=1,2,\cdots,k)$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$\left(a_{k+1}+\frac{k(k+1)}{2}\right)^2=a_{k+1}^3+\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

$a_{k+1}^3-a_{k+1}^2-k(k+1)a_{k+1}=0$

$a_{k+1}(a_{k+1}+k)(a_{k+1}-(k+1))=0$

$a_{k+1}>0$ より $a_{k+1}=k+1$

より成り立つ

i), ii) から数学的帰納法より

題意は示された

〈point〉

1. 数学的帰納法（全段階仮定）