高2数学　基本問題演習　18. 数列(2)

$\boxed{1}$ [(1) 2001 近畿大　(2) 1997 同志社大　(3) 1996 会津大　(4) 2018 龍谷大]

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)}={}^{ア}\boxed{}-\frac{{}^{イ}\boxed{}}{n+{}^{ウ}\boxed{}}$$

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+2)}={}^{エ}\boxed{}-{}^{オ}\boxed{}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+{}^{カ}\boxed{}}\right)$$

が成り立つ．

また，

$$\frac{1}{m(m+1)(m+2)}=\frac{{}^{キ}\boxed{}}{{}^{ク}\boxed{}\,m(m+1)}-\frac{{}^{ケ}\boxed{}}{{}^{コ}\boxed{}\,(m+1)(m+2)}$$

であるから

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)(m+2)}={}^{サ}\boxed{}-\frac{{}^{シ}\boxed{}}{{}^{ス}\boxed{}\,(n+1)\left(n+{}^{セ}\boxed{}\right)}$$

となる．同様に考えて

$$\sum_{m=1}^{9}\frac{18}{m(m+1)(m+2)(m+3)}={}^{ソ}\boxed{}$$

である．

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定めるとき，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(3) 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ を求めよ．

(4) 次の等式が成り立つ自然数 n を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)=10$$

$\boxed{2}$ [1997 高知大]

(1)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$ を求めよ．

(2)　初項 1，公差 2 の等差数列の第 k 項を x_k とし，初項 1，公比 2 の等比数列の第 k 項を y_k とする．このとき，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$ を求めよ．

$\boxed{3}$［Ⅰ．2003 滋賀大　Ⅱ．2002 学習院大］

Ⅰ．座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という．

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

(2)　$y \geqq 0$，$y \leqq 2x$，$x+2y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

Ⅱ．条件 $0 \leqq m \leqq 500$，$0 \leqq n \leqq \sqrt{m}$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ はいくつあるか．

$\boxed{4}$［2019 大阪工業大］

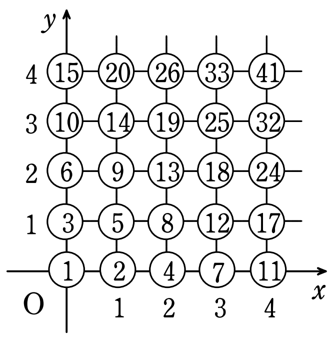
自然数を次のように群に区分けする。ただし，区分けされた n 番目の部分を第 n 群 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と呼び，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6 \mid 7,\ 8,\ 9,\ 10 \mid 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15 \mid 16,\ \cdots\cdots$$

このとき，第 8 群の最初の数は ア $\boxed{\quad}$ であり，50 は第 イ $\boxed{\quad}$ 群に含まれる。また，第 n 群に含まれるすべての数の和 S_n を n の式で表すと，$S_n=$ ウ $\boxed{\quad}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ となる。

$\boxed{5}$［Ⅰ．2007 高知大　Ⅱ．2007 広島大］

Ⅰ．xy 平面で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の範囲にあるすべての格子点 $(m,\ n)$ に，右図のような規則で番号をふる。ただし，右図において，◯ の中の数字がその格子点の番号である。



(1)　格子点 $(0,\ n)$ の番号を n を用いて表せ。

(2)　格子点 $(2,\ 25)$ の番号を求めよ。

(3)　格子点 $(m,\ n)$ の番号を m，n を用いて表せ。

高2数学　基本問題演習　18. 数列(2)

Ⅱ．図のように，1 を左下のマス目におき，1 の右に 2 を，2 の上に 3 を，3 の左に 4 をおく。次に 2 の右に 5 をおき，5 の上に 6，7 を，7 の左に 8，9 をおく。
このように，すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく。左から j 番目，下から k 番目のマス目にある自然数を $a(j,\ k)$ と書く。
例えば $a(3,\ 4)=14$，$a(3,\ 5)=23$ である。

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1)　$a(1,\ k)$，$a(j,\ 1)$ をそれぞれ k，j の式で表せ。

(2)　$a(j,\ k)$ を $j \geqq k$ と $j<k$ の場合に分けて求めよ。

(3)　$a(j,\ k)=2007$ となる j，k を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [富山県立大]

正の整数からなる数列 $\{a_n\}$ を $a_n=13^n+2\cdot 23^{n-1}$ で定める.

(1) a_1, a_2 を求め，それぞれを素因数分解せよ.

(2) $a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ のすべてに共通する素因数が存在することを，数学的帰納法を用いて示せ.

$\boxed{7}$ [1997 東京大]

a, b は実数で $a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ を満たしている.

(1)　$a+b$ の値を求めよ.

(2)　n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ.

$\boxed{8}$

数列 $\{a_n\}$ (ただし $a_n>0$) について，次の関係式が成り立つとする.

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots\cdots+a_n{}^3$$

(1) a_1, a_2, a_3 を求め，一般項 a_n を推定せよ.

(2) 数学的帰納法を用いて，(1) の推定が正しいことを証明せよ.