

高2数学 基本問題演習 演習 33. 積分法(2)

1 [1997 城西大]

関数 $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ と x 軸で囲まれる面積は である。

2 [2016 東京電機大]

曲線 $y = x^3 - 4x$ と曲線 $y = 3x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

3 [(1) 2003 小樽商科大 (2) 2009 防衛大学校 (3) 2017 学習院大]

(1) $\int_0^1 (|2x-1| + |3x-2|) dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_{-2}^4 |x^2 - 2x - 3| dx$ の値を求めよ。

(3) 定積分 $\int_{-1}^2 |x^3 - 3x| dx$ を求めよ。

4 [I. 2016 愛媛大 II. 2005 宮城教育大 III. 2009 早稲田大]

I. $1 \leq x \leq 2$ とする。関数 $f(x) = \int_1^2 |t-x| dt$ を最小にする x の値を求めよ。

II. a を実数とし、 $S(a) = \int_a^{a+1} |3x^2 - 6x| dx$ とおく。

(1) 関数 $y = |3x^2 - 6x|$ のグラフの概形をかけ。

(2) $a \geq 0$ のとき、 $S(a)$ を求めよ。

(3) $a \geq 1$ のとき、 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

III. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = mx$ とする。積分 $h(m) = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx$ について、 m が

$0 \leq m \leq 3$ を満たしながら動くとき、 $h(m)$ の最大値は $\sqrt{\text{□}}$ 、最小値は

$\frac{\sqrt{\text{□}} - \sqrt{\text{□}}}{2} \sqrt{2}$ である。

表題

5 [2003 京都府立医科大]

円 C は点 $P\left(a, \frac{1}{2}\right)$ ($a > 0$) を中心とし、 x 軸に接しているものとする。円 C が曲線 $y = x^2$ と 1 点のみを共有する (すなわち、接する) ような a の値を求めよ。更に、この a に対して、円 C の外部で、 x 軸と曲線 $y = x^2$ と円 C の円周とで囲まれた部分の面積を求めよ。

6 [I. 1997 東北学院大 II. 2007 京都教育大]

I. (1) 曲線 $y = |x(4-x)|$, x 軸および直線 $x = p$ ($p > 4$) で囲まれた図形 D の面積を求めよ。

(2) 図形 D の、直線 $x = 4$ の左側の部分と右側の部分の面積が等しいとき、 p の値を求めよ。

II. $f(x) = -x^2 + 6x$ とする。放物線 $y = f(x)$ を C とし、 C 上の点 $P(a, f(a))$ ($0 < a < 3$) を考える。直線 $x = 3$ と直線 OP の交点を Q とする。ただし、 O は原点を表す。

(1) 放物線 C と線分 OP によって囲まれる図形の面積 A を、 a を使って表せ。

(2) 放物線 C と線分 PQ と直線 $x = 3$ によって囲まれる図形の面積 B を、 a を使って表せ。

(3) $A = B$ となるような a の値を求めよ。

7 [大分大]

曲線 $C : y = (x-a)(x-4)(x-b)$ について考える。ここで、 a, b は $a < 4 < b$ を満たす定数とする。

(1) 曲線 C と x 軸とで囲まれる 2 つの部分の面積が等しいとき、 $a + b$ の値を求めよ

(2) $a > 0$ とする。曲線 C と x 軸、 y 軸とで囲まれる 3 つの部分の面積が等しいとき、 a, b の値を求めなさい。

8 [2019 甲南大]

$f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ に関して、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ は原点に対して点対称であることを証明せよ。

(2) 曲線 $y = g(x)$ は曲線 $y = f(x)$ を x 軸方向に a , y 軸方向に b だけ平行移動したものである。このとき、 a, b の値を求めよ。

(3) 曲線 $y = g(x)$ と直線 $y = x + c$ で囲まれる部分が 2 つあり、かつ、その 2 つの部分の面積が等しくなるときの c の値を求めよ。

表題

9 [2002 福井大]

直線 $l_a: y = ax$ と曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + x$ が相異なる 3 点で交わり、かつ原点以外の 2 つの交点の x 座標はともに正である。ただし、 a は 0 でない定数である。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた範囲を動くとき、 l_a と C で囲まれてできる 2 つの図形の面積を等しくするような a の値を求めよ。

10 [2017 名古屋大]

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x) = ax^2$ と 3 次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = g(x)$ について、極値を求め、そのグラフをかけ。
- (2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。
- (3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき、2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。