高2数学　基本問題演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{1}$

△ABCにおいて，$A=60^\circ$，$B=90^\circ$，AB$=4$である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　を求めよ．

$\boxed{2}$ [Ⅰ．2004 静岡大　Ⅱ．2004 工学院大　Ⅲ．2007 国士舘大]

Ⅰ．2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ が垂直であるとき，x の値を求めよ．

(2) $\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ が平行であるとき，x の値を求めよ．

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，x の値を求めよ．

Ⅱ．$\vec{a}=(2,\ 0)$，$\vec{b}=(x,\ 2)$，$\vec{c}=(3,\ 4)$ とする．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角と，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角が等しいとき，x の値を求めよ．

Ⅲ．平面ベクトル $\vec{a}$ は大きさが $3\sqrt{5}$ で，平面ベクトル $\vec{b}=(-1,\ 2)$ に垂直である。$\vec{a}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ [(1) 2006 青山学院大　(2) 1999 関西大　(3) 2019 京都産業大　(4) 2015 駒澤大]

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 30° で，かつ $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ であるとする。このとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア$\boxed{}$，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})=$ イ$\boxed{}$，$|\vec{a}-\sqrt{3}\,\vec{b}|=$ ウ$\boxed{}$ である。

(2) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ を満たしているとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ ($0^\circ\leqq\theta<180^\circ$) を求めよ．

(3) △ABCにおいて AB$=7$，BC$=5$，CA$=3$ とする。内積 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の値は $\boxed{}$ である。

(4) 1辺の長さが1の正三角形ABCにおいて，辺BCの三等分点をP，Qとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の値を求めよ。

高2数学　基本問題演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{4}$ [(1) 2009 立命館大　(2) 2017 東京都市大]

(1) $\vec{a}=(-4,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値は $^{ア}\boxed{\quad}$ で，そのときの最小値は $^{イ}\boxed{\quad}$ である。また，このとき $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ とのなす角を θ とすると $\theta=^{ウ}\boxed{\quad}$ である。

(2) ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ に対し，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。実数 t が $0\leqq t\leqq 1$ を満たしながら動くとき，$|\vec{p}|$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{5}$ [2008 慶応義塾大]

$\triangle$OABにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は $\boxed{\quad}$ である。

(2)　$\triangle$OABの面積は $\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{6}$ [Ⅱ．2021 摂南大]

Ⅰ．$\triangle$OABの重心を点Gとし，$|\overrightarrow{OA}|=3, |\overrightarrow{OB}|=2, \angle AOB=60^\circ$ とする.

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{\quad}, \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}=\boxed{\quad}$ である.

(2) $|\overrightarrow{OG}|=\boxed{\quad}$ である.

(3) $\angle AOG=\theta$ とすると，$\cos\theta=\boxed{\quad}$ である.

Ⅱ．中心O，半径1の円に内接する三角形ABCがあり，$2\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線COと辺ABの交点をDとする。このとき，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{^{ア}\boxed{\quad}}{^{イ}\boxed{\quad}}\overrightarrow{OA}+\frac{^{ウ}\boxed{\quad}}{^{エ}\boxed{\quad}}\overrightarrow{OB} \text{ である。}$$

(2)　$\dfrac{DB}{AD}=\dfrac{^{オ}\boxed{\quad}}{^{カ}\boxed{\quad}}$，$\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{^{キ}\boxed{\quad}}{^{ク}\boxed{\quad}}$ である。

(3)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta=\dfrac{^{ケ}\boxed{\quad}}{^{コ}\boxed{\quad}}$ である。

高2数学　基本問題演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{7}$ [Ⅰ．2015 甲南大　Ⅱ．2004 小樽商科大　Ⅲ．2010 岐阜聖徳学園大]

Ⅰ．AB=3，AC=2，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$ である △ABC において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

このとき，点 A から辺 BC に垂線 AP を引くと，$\overrightarrow{AP}=$ ${}^{ア}\boxed{}\vec{b}+{}^{イ}\boxed{}\vec{c}$ である。

Ⅱ．△OAB において，OA＝2，OB＝3，AB＝4 である．点 O から辺 AB に下ろした垂線を OH とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ.

Ⅲ．1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 CD の中点を E とし，点 F を BE⊥AF となる BE 上の点とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　DF の長さを求めよ。

$\boxed{8}$ [Ⅰ．2008 群馬大　Ⅱ．兵庫県立大]

Ⅰ．△OAB の 3 辺の長さを OA＝OB＝$\sqrt{5}$，AB＝2 とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(3)　点 O から直線 AB に下ろした垂線と直線 BP との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

Ⅱ．三角形 OAB について，OA＝$\sqrt{2}$, OB＝$\sqrt{3}$, AB＝2 とする．点 O から辺 AB に下ろした垂線の足を L，辺 OB に関して L と対称な点を P とする．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．また，$\overrightarrow{OL}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ.

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ.

高2数学　基本問題演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{9}$ [(1) 2021 京都大　(2) 1997 滋賀大]

(1) △OABにおいて $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする。△OABの垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) △ABCにおいて，$\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{AC}=3$, $\angle\mathrm{A}=60^\circ$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする．このとき，△ABCの外心を O として，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

$\boxed{10}$ [Ⅰ．2011 埼玉大　Ⅱ．2016 東京海洋大　Ⅲ．2011 鹿児島大]

Ⅰ．各辺の長さが0でない三角形ABCに対し，

$$P(\mathrm{A})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad P(\mathrm{B})=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}},\quad P(\mathrm{C})=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

とおく。

(1)　$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{C})$ を満たすとき，この三角形はどのような三角形か。

(2)　$P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})=P(\mathrm{C})P(\mathrm{A})$ を満たすとき，この三角形はどのような三角形か。

Ⅱ．△ABCに対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ として，

$$\vec{p}=|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}+|\vec{c}|\vec{a}$$

によって $\vec{p}$ を定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p}=\vec{0}$ は△ABCが正三角形であるための必要十分条件であることを証明せよ。

(2) $\vec{p}=\vec{a}$ かつ $|\vec{p}|=4$ のとき，$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ。

Ⅲ．四角形ABCDに対して次の①と②が成り立つとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}\quad\cdots\cdots②$$

このとき，四角形ABCDは向かい合う辺の長さが等しくなる(すなわち平行四辺形になる)ことを示せ。