高2数学　基本問題演習　演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{1}$［東京女子医大］

1 辺の長さが a の正六角形 ABCDEF において，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ をそれぞれ求めよ．

$\boxed{2}$［Ⅰ.2003 千葉工業大 Ⅱ.1996 日本女子大 Ⅲ.1997 近畿大 Ⅳ.2005 立教大］

Ⅰ．3 点 O(0，0)，A(2，1)，B(3，p) が $\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$ を満たすとき，p の値を求めよ．

Ⅱ．平面上に 2 つのベクトル $\vec{a}=(4,-3), \vec{b}=(2,1)$ をとる．

(1)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような t の値と，その最小の大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ とのなす角が 45° となるような t の値を求めよ．

Ⅲ．ベクトル $\vec{a}=(1,2), \vec{b}=(1,1), \vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ がある．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ が垂直になるのは $t=$ ア $\boxed{}$ のときである．また，$\vec{a}$ と $\vec{c}$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角が等しくなるのは $t=$ イ $\boxed{}$ のときである．

Ⅳ．ベクトル (1，2) と垂直で，大きさが 2 のベクトルを求めよ。

$\boxed{3}$［(1) 慶応義塾大　(2),(5) 千葉工業大　(3) 中央大　(4) 愛知工業大］

(1) 平面上の 2 つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ が $|\vec{p}+\vec{q}|=\sqrt{13}$，$|\vec{p}-\vec{q}|=1$，$|\vec{p}|=\sqrt{3}$ を満たしている。このとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ は ア $\boxed{}$ であり，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角 θ は イ $\boxed{}$° である。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ である。

(2) 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ を満たし，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2\sqrt{3}$ であるとき，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}=$ ア $\boxed{}$ であり，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は イ $\boxed{}$° である．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を 60°，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさを求めよ。

(4) 平面上の 3 点 O, A, B に対し，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3, |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1, |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$ であるとき，

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=$ ア $\boxed{}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角は イ $\boxed{}$ である．

(5) 三角形 OAB において，OA=3，OB=6，∠AOB=60° であるとき，AB を 1 : 2, 2 : 1 に内分する点 D，E に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\boxed{}$ である．

高2数学　基本問題演習　演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{4}$ [Ⅰ．2015 関西学院大　Ⅱ．2011 北海道情報大]

Ⅰ．ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=7$ を満たしている。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ア $\boxed{}$ である。また，$|2\vec{a}+\vec{b}|=$ イ $\boxed{}$ であり，$\vec{a}-2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=$ ウ $\boxed{}$ である。更に，t が実数全体を動くとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値は エ $\boxed{}$ で，そのときの t の値は オ $\boxed{}$ である。

Ⅱ．2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 6)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対し，$\vec{c}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。
ただし，t は実数である。

(1)　$|\vec{c}|$ が最小となるときの t の値と，そのときのベクトル $\vec{c}$ を求めよ。

(2)　(1) の $\vec{c}$ は，ベクトル $\vec{b}-\vec{a}$ に垂直であることを示せ。

$\boxed{5}$ [Ⅰ．1999 近畿大　Ⅱ．2022 中央大]

Ⅰ．$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ のとき,三角形 OAB の面積を求めよ．

Ⅱ．△ABC において，ベクトルの内積が $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-4$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-5$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　3辺 AB，BC，CA の長さを求めよ。

(2)　△ABC の面積を求めよ。

$\boxed{6}$ [2006 愛知工業大　2016 愛知教育大]

Ⅰ．1辺の長さが1であるような正三角形 ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を Q とし，CP と BQ の交点を R とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ の大きさを求めよ。

Ⅱ．点 O を中心とする半径1の円に内接する鋭角三角形 ABC において，辺 BC と直線 AO との交点を M とする。$5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ が成り立っているとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(2)　BC の長さを求めよ。

(3)　BM の長さを求めよ。

(4)　$\cos\angle\mathrm{BOM}$ を求めよ。

高2数学　基本問題演習　演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{7}$ ［Ⅰ．2006 東京理科大　Ⅱ．2023 長崎大　Ⅲ．2023 関西大］

Ⅰ．△ABC において，AB＝5，AC＝4，∠BAC＝60° とする。頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と BC との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=$ ア$\boxed{}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+$ イ$\boxed{}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。

Ⅱ．△OAB の 3 辺の長さは，それぞれ OA＝2，AB＝3，BO＝3 である。頂点 O から辺 AB に垂線を下ろし，直線 AB との交点を H とする。また，△OAB の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表し，線分 GH の長さを求めよ。

Ⅲ．平行四辺形 OABC において，∠OCA＝90° とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{13}$，$|\vec{c}|=1$ とする。点 C から対角線 OB に下ろした垂線を CD とおく。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{c}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ で表せ。

(3)　辺 CD の長さを求めよ。

$\boxed{8}$ ［Ⅰ．2009 三重大　Ⅱ．2012 鹿児島大］

Ⅰ．O，A，B を平面上の 3 点とし，三角形 OAB を考える。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=d$ として以下の問いに答えよ。

(1)　直線 OB に点 A から下ろした垂線と直線 OB の交点を D とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　線分 AB に点 O から下ろした垂線と直線 AB の交点を E とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　線分 AE と線分 ED の長さが同じであることを証明せよ。

Ⅱ．平面上に互いに異なる 3 点 O，A，B があり，それらは同一直線上にはないものとする。OA＝2，OB＝3 とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく。∠AOB の二等分線と線分 AB との交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，∠AOB と OC を求めよ。

高2数学　基本問題演習　演習　36. 平面ベクトル(2)

$\boxed{9}$［Ⅰ．2023 鳥取大　Ⅱ．2015 北里大］

Ⅰ．△ABCにおいて，$\angle A=60^\circ$，$AB=8$，$AC=6$ とする。△ABCの垂心をHとするとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

Ⅱ．△ABCにおいて，$AB=3$，$AC=4$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ である。△ABCの外心をOとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおく。

(1)　△ABCの外接円の半径は $^{ア}\boxed{}$ である。

(2)　$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{AO}=\,^{イ}\boxed{}\,\vec{b}+\,^{ウ}\boxed{}\,\vec{c}$ である。

(3)　直線BOと辺ACの交点をPとするとき，AP：PCは $^{エ}\boxed{}$ である。

$\boxed{10}$［Ⅰ．岡山理科大　Ⅱ．2001 群馬大］

Ⅰ．点Oを始点とする3つの平面ベクトルを $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とする．これらのベクトルが $\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$ を満たすとき，△ABCはどのような三角形であるか．

Ⅱ．(1)　平面上の△ABCにおいて，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ が成立するとき，△ABCは正三角形であることを示せ．

(2)　平面上の四角形ABCDの内角はどれも180°より小とする．
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}$ が成立するとき，四角形ABCDは長方形であることを示せ．