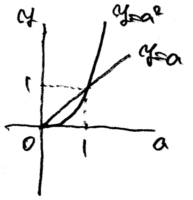
基本問題演習 7. 2次方程式・不等式(2)

[1]

I. $x^2-a(a+1)x+a^3<0$

$x^2-(a^2+a)x+a^3<0$

$(x-a)(x-a^2)<0$

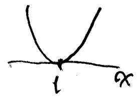


(i) $a>a^2$ すなわち $0<a<1$ のとき

$a^2<x<a$

(ii) $a=a^2$ すなわち $a=1$ のとき

解なし



(iii) $a<a^2$ すなわち $a>1$ のとき

$a<x<a^2$ //

II. (1) $a=0$ のとき

$-x+1<0$ ∴ $x>1$

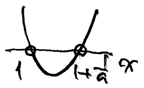
(2) $a>0$ のとき

$ax^2-(2a+1)x+a+1=0$

a　-1　—　-a
1　-(a+1)　—　-a-1

$(x-1)(ax-(a+1))=0$

∴ $x=1,\ \frac{a+1}{a}$ $=1+\frac{1}{a}$

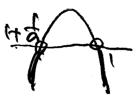


よって

$1<x<1+\frac{1}{a}$

(3) $a<0$ のとき

$x<1+\frac{1}{a},\ x>1$ //



<point>

1. 2次不等式.

[2]

$x^2-x-6\leqq 0$

$(x+2)(x-3)\leqq 0$ ∴ $-2\leqq x\leqq 3$

$x^2-(2a-3)x+a^2-3a-10\leqq 0$

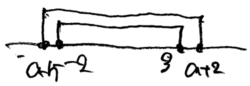
$x^2-(2a-3)x+(a+2)(a-5)\leqq 0$

$\{x-(a-5)\}\{x-(a+2)\}\leqq 0$ ∴ $a-5\leqq x\leqq a+2$

(1) $\begin{cases} a-5\leqq -2 \\ a+2\geqq 3 \end{cases}$

となればよいから

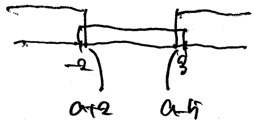
$\boxed{1}\leqq a\leqq\boxed{3}$



(2) $\begin{cases} a+2\geqq -2 \\ a-5\leqq 3 \end{cases}$

となればよいから

$\boxed{-4}\leqq a\leqq\boxed{8}$



<point>

2. 連立2次不等式.

[3]

因数分解できない → グラフを利用

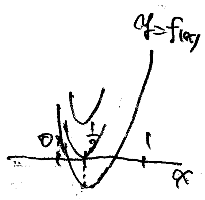
I. (1) $f(x)=3x^2-2x+3a+1$ とおく

$=3(x-\frac{1}{3})^2+3a+\frac{2}{3}$

グラフは下に凸, 頂点 $(\frac{1}{3},\ 3a+\frac{2}{3})$

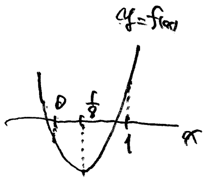
$f(0)>0$ となればよいから

$3a+1>0$ ∴ $a>-\boxed{\frac{1}{3}}$



(2) $f(0)\leqq 0,\ f(1)>0$ となればよいから

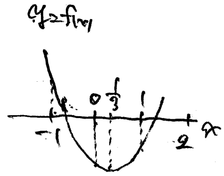
$\begin{cases} 3a+1\leqq 0 \\ 3a+2>0 \end{cases}$ ∴ $-\boxed{\frac{2}{3}}<a\leqq -\boxed{\frac{1}{3}}$



そのとき $x=\boxed{0}$

(3) $f(1)\leqq 0,\ f(-1)>0$ となればよいから

$\begin{cases} 3a+2\leqq 0 \\ 3a+6>0 \end{cases}$ ∴ $-\boxed{2}<a\leqq -\boxed{\frac{2}{3}}$



小さいほうの解は $x=0$.

大きい　$x=1$.

(4) $x=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ を解にもてばよい

$f(-4)\leqq 0,\ f(5)>0$ となればよいから

$\begin{cases} 3a+57\leqq 0 \\ 3a+66>0 \end{cases}$ ∴ $-\boxed{22}<a\leqq -\boxed{19}$

最小の解は $x=-\boxed{4}$

大　$x=\boxed{4}$

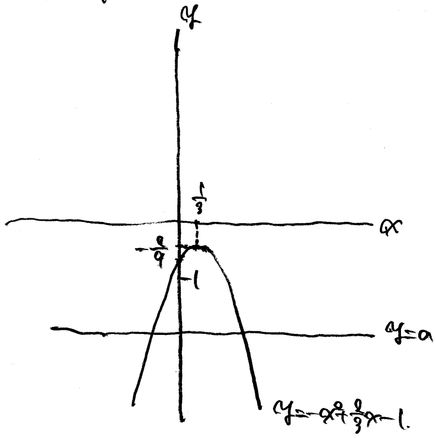
[別解] 定数分離

$3x^2-2x+3a+1\leqq 0$

$-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\geqq a$ の解は

$y=-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ において $y\geqq a$ となる x の範囲である

$=-(x-\frac{1}{3})^2-\frac{2}{9}$



あとは a を動かして考えればよい。

II. $x^2-kx+k+3<0$

$x^2<k(x-1)-3$ の解は

$y=x^2$ において $y<k(x-1)-3$ となる x の範囲である

$y=x^2$ と $y=k(x-1)-3$ が

接するとき

$x^2-kx+k+3=0$ の判別式

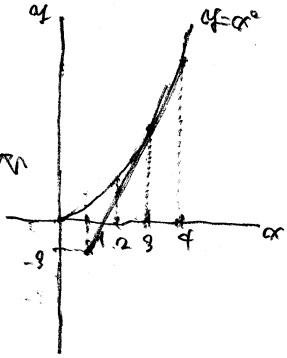
をDとして

$D=k^2-4(k+3)$

$=k^2-4k-12$

$=(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2,\ 6$



$k=6$ のとき 接点の x 座標は $x=3$

$(2,4)$ を通るとき $k=7$

$(4,16)$ 〃 $k=\frac{19}{3}$

$f(x)<0$ を満たす整数 x が3だけのとき

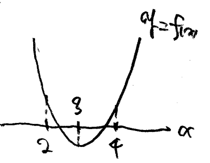
グラフより

$6<k<\frac{19}{3}$ //

[別解]

$f(x)<0$ を満たす整数 x が3だけのとき

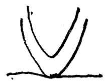
$$\begin{cases} f(2)>0 : -k+7>0 & \therefore k<7 \\ f(3)<0 : -2k+12<0 & \therefore k>6 \\ f(4)>0 : -3k+19>0 & \therefore k<\frac{19}{3} \end{cases}$$



$\therefore 6<k<\frac{19}{3}$ //

$\boxed{4}$.

(i) $x^2+mx+m<0$ が実数の解をもたないとき



$x^2+mx+m=0$ の判別式をDとして

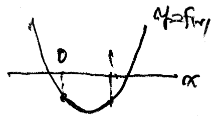
$D=m^2-4m\leqq 0$

$m(m-4)\leqq 0$ $\therefore \boxed{0}\leqq m\leqq\boxed{4}$

$x^2+mx+m<0$ の解が $0\leqq x\leqq 1$ を含むとき

$f(x)=x^2+mx+m$ とおくと

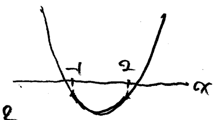
$$\begin{cases} f(0)<0 : m<0 \\ f(1)<0 : 1+2m<0 \quad \therefore m<-\frac{1}{2} \end{cases}$$



$\therefore m<\boxed{-\frac{1}{2}}$

(ii) 題意をみたすとき

$$\begin{cases} f(-1)<0 : -1\leqq 0 \quad 常に成立 \\ f(2)<0 : 3a+2\leqq 0 \quad \therefore a\leqq -\frac{2}{3} \end{cases}$$



$\therefore a\leqq -\frac{2}{3}$ //

$\boxed{5}$

(i) $k=0$ のとき

$-3x-1\leqq 0$ $\therefore x\leqq -\frac{1}{3}$ となり不適

(ii) $k\neq 0$ のとき

題意をみたすとき

$kx^2+(2k-3)x+2k-1=0$ の判別式をDとすると

$$\begin{cases} k>0 \\ D\leqq 0 : (2k-3)^2-4k(2k-1)\leqq 0 \end{cases}$$

$-4k^2-8k+9\leqq 0$

$4k^2+8k-9\geqq 0$

$k\geqq\frac{-2+\sqrt{13}}{2}$ //

6

すべてのxで$f(x)>0$となるとき
$f(x)=0$の判別式をDとすると

$D<0$

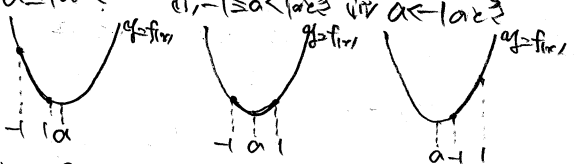
$\frac{D}{4}=a^2-(-a+6)$

$=a^2+a-6<0$

$(a+3)(a-2)<0$ ∴ $\boxed{-3}<a<\boxed{2}$

$-1\leqq x\leqq 1$で常に$f(x)\geqq 0$となるとき（最小値が0となればよい）

i) $a\geqq 1$のとき　ii) $-1\leqq a<1$のとき　iii) $a<-1$のとき



最小値$f(1)=-3a+7\geqq 0$　最小値$f(a)=-a^2-a+6\geqq 0$　最小値$f(-1)=a+7\geqq 0$

∴$a\leqq \frac{7}{3}$　∴$-3\leqq a\leqq 2$　∴$a\geqq -7$

$a\geqq 1$より　$-1\leqq a\leqq 1$より　$a<-1$より

$1\leqq a\leqq \frac{7}{3}$　$-1\leqq a\leqq 1$　$-7\leqq a<-1$

i)〜iii)より

$\boxed{-7}\leqq a\leqq \boxed{\frac{7}{3}}$

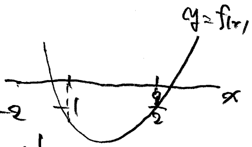
7

$2x^2-x-3<0$　$\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{matrix}$

$(x+1)(2x-3)<0$

∴$-1<x<\frac{3}{2}$　$f(x)=x^2+ax-3$とおく

この連立不等式が解をもたないとき



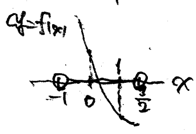
$\begin{cases} f(-1)\leqq 0 & ∴-a-2\leqq 0 \quad ∴a\geqq -2 \\ f(\frac{3}{2})\leqq 0 & : \frac{3}{2}a-\frac{3}{4}\leqq 0 \quad ∴a\leqq \frac{1}{2}\end{cases}$

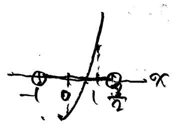
∴$-2\leqq a\leqq \frac{1}{2}$　よって、この連立不等式が解をもつとき

$a<-2,\ a>\frac{1}{2}$

この連立不等式の整数解がただ1つであるとき

i) $x=0$のみ　ii) $x=1$のみ





$f(0)f(1)\leqq 0$

$-3(a-2)\leqq 0$

$a-2\geqq 0$

∴$a\geqq 2$

8

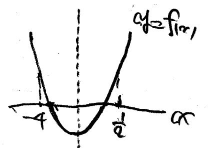
$2x^2+7x-4\leqq 0$　$\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{matrix}$

$(x+4)(2x-1)\leqq 0$

∴$-4\leqq x\leqq \frac{1}{2}$

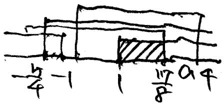
$f(x)=x^2+2ax+1$とし、$f(x)=0$の判別式をDとすると

題意をみたすとき　$D\geqq 0$: $\frac{D}{4}=a^2-1\geqq 0$ ∴$a\leqq -1,\ a\geqq 1$



$\begin{cases} f(-4)\geqq 0 & ∴-8a+17\geqq 0 \quad ∴a\leqq \frac{17}{8} \\ f(\frac{1}{2})\geqq 0 & ∴a+\frac{5}{4}\geqq 0 \quad ∴a\geqq -\frac{5}{4} \\ -4\leqq 軸\leqq \frac{1}{2} & ∴-4\leqq -a\leqq \frac{1}{2} \end{cases}$

∴$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 4$



∴$1\leqq a\leqq \frac{17}{8}$

[7] [別解] 定数分離

$2x^2-x-3<0$　　$\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{matrix}$

$(x+1)(2x-3)<0$

∴ $-1<x<\frac{3}{2}$

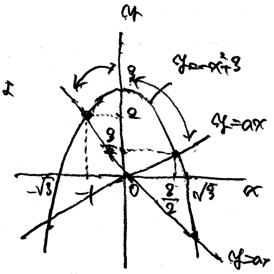
$x^2+ax-3\geqq 0$

$\underset{上}{ax}\geqq \underset{下}{-x^2+3}$ ← 定数分離の解は

$y=ax$ のy座標が $y=-x^2+3$

のy座標以上となるxの範囲

に等しいから



連立不等式が解をもつためには

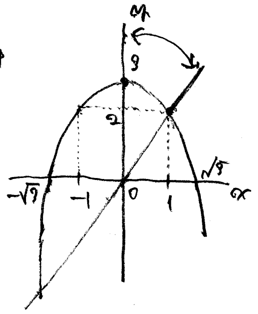
$a<-2,\ a>\frac{1}{2}$ ... (ア)

整数解が1つであるとき

整数解は $x=0$ のみか $x=1$ のみ

となればよいから

$a\geqq 2$ ... (イ)



[8] [別解] 定数分離

$2x^2+7x-4\leqq 0$ ... ②　　$\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{matrix}$

$(x+4)(2x-1)\leqq 0$

∴ $-4\leqq x\leqq \frac{1}{2}$

$x^2+2ax+1\leqq 0$ ... ①

$\underset{下}{2ax}\leqq \underset{上}{-x^2-1}$

①を満たすxが

すべて②を満たすとき

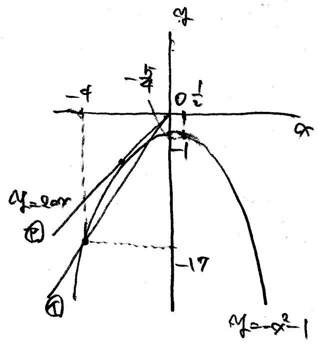
(ア)のとき

$x^2+2ax+1=0$ が重解を

もてばよいから

判別式をDとしてD=0より

$D/4=a^2-1=0$　∴ $a=1$



(イ)のとき

$2a=\frac{17}{4}$　∴ $a=\frac{17}{8}$

よって

$1\leqq a\leqq \frac{17}{8}$