高2数学　基本問題演習　演習　20. 漸化式(2)

$\boxed{1}$ [1997 関西学院大]

$a_1=2, b_1=1, a_n=2a_{n-1}+3b_{n-1}, b_n=3a_{n-1}+2b_{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ によって定義される 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある．このとき，a_n+b_n, a_n および b_n を n の式で表せば，

$a_n+b_n=$ ア$\boxed{}$, $a_n=$ イ$\boxed{}$, $b_n=$ ウ$\boxed{}$ である．

$\boxed{2}$ [1996 東北大]

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=a_n-4b_n+1, b_{n+1}=2a_n-5b_n-1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義されている．ただし，$a_1=1, b_1=0$ とする．

(1)　a_n-b_n を求めよ．

(2)　a_n, b_n を求めよ．

$\boxed{3}$ [2005 早稲田大]

次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を考える。

$x_1=1$，$y_1=5$，$x_{n+1}=x_n+y_n$，$y_{n+1}=5x_n+y_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1)　x_n および y_n をそれぞれ 5 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$a_n=x_n+cy_n$ とおいたとき，数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め，a_n を n の式で表せ。

(3)　x_n および y_n を n の式で表せ。

$\boxed{4}$ [2021 同志社大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は $a_1=-2$，$b_1=-3$ であり，$a_{n+1}=3a_n+2b_n$，$b_{n+1}=3a_n-2b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たす。このとき，一般項は $a_n=$ ア$\boxed{}$，$b_n=$ イ$\boxed{}$ と求まる。

高2数学　基本問題演習　演習　20. 漸化式(2)

$\boxed{5}$ [2009 大分大]

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n-S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 1$ のとき，a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ。

(2)　$b_n=a_{n+1}-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{6}$ [2015 県立広島大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{5a_n+9}{-a_n+11}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　$a_n<3$ を示せ。

(4)　$a_n<a_{n+1}$ を示せ。

(5)　a_n が自然数となる n をすべて求めよ。

$\boxed{7}$ [2005 香川大]

正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく。数列 $\{a_n\}$ が

$2S_n={a_n}^2+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(3)　a_n を予想し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{8}$ [1998 滋賀大]

平面上に，どの 3 本の直線も 1 点を共有しない，n 本の直線がある．

(1)　どの 2 本の直線も平行でないとき，平面が n 本の直線によって分けられる部分の個数 a_n を n で表せ．

(2)　n 本の直線の中に，2 本だけ平行なものがあるとき，平面が n 本の直線によって分けられる部分の個数 b_n を n で表せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．

高2数学　基本問題演習　演習　20. 漸化式(2)

9 [2020 立命館大]

ある水槽に水を入れておくと，1日(24時間)経つと水の容積が10％減少する。その水槽が空の時，1回目に10リットルの水を入れ，その後，1日経つ毎に p リットル $(0<p<10)$ の水をさらに入れるものとする。a_n は n 回目に水を入れた直後の水槽の水の容積(単位はリットル)とする。

数列 $\{a_n\}$ において，$n\geqq 1$ のとき a_{n+1} と a_n の間には，p を用いて $a_{n+1}=$ ア $\boxed{}$ となる関係式が成り立つ。したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は n と p を用いて，

$a_n=10\left\{ ^{イ}\boxed{} \right\}p+10^{ウ}\boxed{}$ となる。

よって，毎回水を入れた直後の水の容積が常に一定となるのは，$p=$ エ $\boxed{}$ のときである。

10 [2018 慶応義塾大]

n 桁 $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ の自然数のうち，各々の位の数字が1または素数となっている数は $^{ア}\boxed{}^{n}$ 個あるが，このうち，3で割り切れる数の個数を a_n，3で割ると1余る数の個数を b_n，3で割ると2余る数の個数を c_n とすると $a_n+b_n+c_n=$ $^{ア}\boxed{}^{n}$ ……① である。a_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表すと $a_{n+1}=$ $^{イ}\boxed{}a_n+$ $^{ウ}\boxed{}b_n+$ $^{エ}\boxed{}c_n$ となるので，①によって a_{n+1} と a_n の関係式は $a_{n+1}=$ $^{オ}\boxed{}a_n+$ $^{カ}\boxed{}\times$ $^{キ}\boxed{}^{n}$ となる。初項 a_1 は1であるから，$\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\dfrac{^{ク}\boxed{}\times{}^{ケ}\boxed{}^{n}+{}^{コ}\boxed{}^{n}}{^{サ}\boxed{}}$

となる。

11 [1995 東京大]

二辺の長さが1と2の長方形と一辺の長さが2の正方形の2種類のタイルがある．縦2，横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える．そのような並べ方の総数を A_n で表す．ただし，n は正の整数である．たとえば $A_1=1, A_2=3, A_3=5$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $n\geqq 3$ のとき，A_n を A_{n-1}, A_{n-2} を用いて表せ．

(2) A_n を n で表せ．