高2数学　基本問題演習　演習　37. 平面ベクトル(3)

$\boxed{1}$ [1998 神戸薬科大　2009 大阪府立大]

Ⅰ．O を原点とする座標平面上の三角形 ABC がある．辺 AB, AC の中点の座標がそれぞれ $(-1, 4)$, $(4, 4)$ であり，重心の座標が $(2, 3)$ である．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(^{ア}\boxed{},\ ^{イ}\boxed{}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(^{ウ}\boxed{},\ ^{エ}\boxed{}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(^{オ}\boxed{},\ ^{カ}\boxed{}\right)$

Ⅱ．四角形 ABCD の頂点 A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とする。

(1)　△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{GD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2)　線分 GD を 2：3 に内分する点を P とし，線分 AC の中点を M とする。線分 MD の中点を Q とするとき，3 点 B，P，Q は一直線上にあることを示せ。

(3)　点 M と点 P が一致するとき，△ABC と △ACD の面積の比を求めよ。

$\boxed{2}$ [Ⅰ．2001 明星大　Ⅱ．2006 金沢大　Ⅲ．1996 防衛医科大学校]

Ⅰ．(1)　点 (2，2) を通り，傾きが $\dfrac{1}{2}$ である直線 l を媒介変数 s を用いて表せ.

(2)　点 (1，1) を通り，直線 l と直交する直線 m を媒介変数 t を用いて表せ.

(3)　2 直線 l と m の交点の座標を求めよ.

(4)　点 (1，1) から直線 l へ下ろした垂線の足と点 (1，1) の間の距離を求めよ.

Ⅱ．O を原点とする座標平面上に 2 点 A (1，1)，B (3，-1) がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　t が $0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 P の動く範囲を図示せよ。

(3)　s，t が $1\leqq s\leqq 3$，$0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 Q の動く範囲の面積を求めよ。

Ⅲ．△ABC において，∠A の 2 等分線と辺 BC との交点を P, また $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とすると，ベクトル $\vec{p}$ は $\vec{p}=k\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)$ と表すことができる．実数 k の値を求めよ.

$\boxed{3}$ [1997 武蔵大]

直線 $x-\sqrt{3}\,y+3=0$ と直線 $(\sqrt{3}+2)x-y+2=0$ とがなす鋭角は ${}^{ア}\boxed{}$°であり，

直線 $x-\sqrt{3}\,y+3=0$ と直線 $\sqrt{3}\,x-y+\sqrt{5}=0$ とがなす鋭角は ${}^{イ}\boxed{}$°である.

$\boxed{4}$ [Ⅰ. 2014 中央大　Ⅱ. 2013 明治大　Ⅲ. 2005 兵庫医科大]

Ⅰ. 座標平面上の 3 点 A$(1,\ 2)$，B$(2,\ 3)$，C$(6,\ 10)$ に関する以下の設問に答えよ。

(1)　座標平面上の点 D$(s,\ t)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{0}$ となるとき，s，t の値を求めよ。

(2)　座標平面上の動点 P$(x,\ y)$ に対し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=6$ であるとき，x，y の関係式を求め，それを座標平面上に図示せよ。

Ⅱ. 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ を満たし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ のなす角を θ とすれば，$\cos\theta=$ ${}^{ア}\boxed{}$ である。また，円のベクトル方程式 $(\vec{p}-2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{p}-2\vec{a}-\vec{b})=0$ で定まる円の半径は，${}^{イ}\boxed{}$ である。

Ⅲ. 座標平面上に定点 A$(2,\ 2)$，B$(7,\ -3)$ があり，点 P が $2\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=3\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$ を満たすように動くとき，点 P が描く円の半径を求めよ。

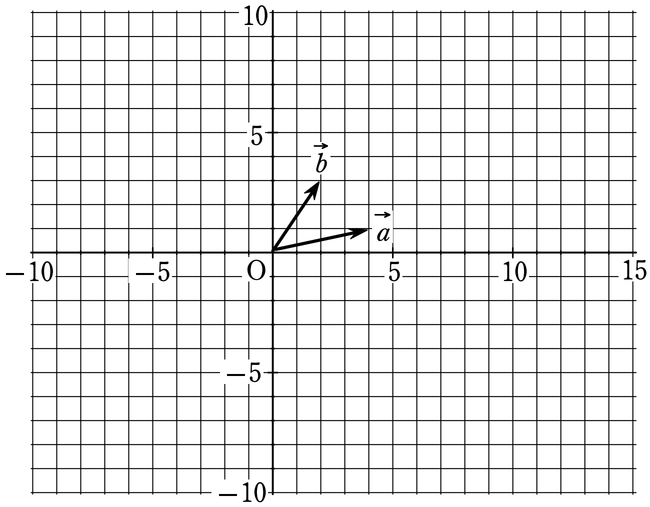
5 [2010 昭和薬科大]

図のようなベクトル

$\vec{a}=(4,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$ がある。

s，t を実数として，ベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(7,\ 7)$ とするとき，

$s=$ ア$\boxed{}$，$t=$ イ$\boxed{}$

である。

(2)　s，t が $-1\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表される点 P が動く範囲全体の面積は ウ$\boxed{}$ である。

(3)　s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$s-t=2$ を満たすとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表される点 P の軌跡を図示せよ。

6 [2013 東京慈恵会医科大]

平面上に 3 点 O，A，B があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ を満たしている。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=$ ア$\boxed{}$ である。また，実数 s，t が条件 $1\leqq s+3t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められた点 P の存在する範囲の面積は イ$\boxed{}$ である。

7 [2006 神戸薬科大]

k は定数で，点 P は △ABC と同じ平面上にあって

$$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

を満たしている。

(1)　点 P が辺 AB 上にあるとき，k の値を求めよ。

(2)　点 P が △ABC の内部にあるような k の値の範囲を求めよ。