基本問題演習 29. 微分法(1)

[1]

1) $\displaystyle \lim_{x\to-2}\frac{x^2+8x+12}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+6)\cancel{(x+2)}}{(x+3)\cancel{(x+2)}}$ ← $\frac{0}{0}$ 不定形を解消

$= 4$ //

2) 分母→0であるから
分子→0であることが必要

$\displaystyle \lim_{x\to3}(ax^2+bx+3)=0$

$9a+3b+3=0 \quad \therefore b=-3a-1$

このとき

$\displaystyle 与式=\lim_{x\to3}\frac{ax^2-(3a+1)x+3}{x^2-2x-3}$

$\displaystyle =\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}(ax-1)}{(x+1)\cancel{(x-3)}}$

$\displaystyle =\frac{3a-1}{4}=\frac{5}{4}$

$\therefore a=2,\ b=-7$

$\begin{matrix}1 & & -3\\ a & \times & -1\end{matrix}$

<point>

1. 極限

[2]

1) $\displaystyle \lim_{x\to5}\frac{5f(x)-xf(5)}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{5f(x)-5f(5)+5f(5)-xf(5)}{x-5}$

$\displaystyle =\lim_{x\to5}\left\{5\cdot\frac{f(x)-f(5)}{x-5}-f(5)\right\}$

$=5f'(5)-f(5)$

2) $\displaystyle \lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot3$

$=3f'(a)$ //

3) $\displaystyle 与式=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}\cdot5-\frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h}\cdot(-3)\right\}$

$=5f'(x)+3f'(x)=\boxed{8}f'(x)$

<point>

1. 微分係数の定義
2. 導関数の定義

[3]

1)(1) $\displaystyle \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$ //

(2) $\displaystyle \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$ //

2) $f(x)=x^4-2x^3+1$

$f'(x)=4x^3-6x^2$

$\displaystyle \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$=8$ //

3) $\displaystyle \lim_{x\to3}(20x+21)=\boxed{81}$

$f(x)=x^4$とおくと $f'(x)=4x^3$

$\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{(3x+1)^4-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+3x)-f(1)}{3x}\cdot3$

$=3f'(1)=12$ //

4) $f(x)=x^5-x^3$

$f'(x)=5x^4-3x^2$

$\displaystyle \lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2-\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)\right\}$

$=2f'(a)+f'(a)$

$=3f'(a)=15a^4-9a^2$ //

(積の微分法)

5) $f'(x)=(2x-2)(x^2+x+2)+(x^2-2x)(3x^2+1)$

$f'(2)=2\cdot12=24$ //

4

(1) $f(x)=x^3$ とおく

$f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ の $x=t\ (t>0)$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-t^3=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3$

これと x 軸との交点Qは $Q\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$

$y=f(x)$ の $x=t\ (t>0)$ における法線は

$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$

$y-t^3=-\frac{1}{3t^2}(x-t)$

$\therefore y=-\frac{1}{3t^2}x+t^3+\frac{1}{3t}$ $\therefore R\left(0, t^3+\frac{1}{3t}\right)$

$\frac{OR}{OQ}=\frac{t^3+\frac{1}{3t}}{\frac{2}{3}t}=\frac{3}{2}\left(t^2+\frac{1}{3t^2}\right)\geq\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{3t^2}}$

$=\sqrt{3}$

等号成立は

$t^2=\frac{1}{3t^2}$ $t^4=\frac{1}{3}$ $\therefore t=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ のとき

このとき最小値をとり最小値は $\sqrt{3}$

(2) $f(x)=x^3+3x^2+x+7$

$f'(x)=3x^2+6x+1$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3+3t^2+t+7)=(3t^2+6t+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2+7$

これが $(1, 4)$ を通るとき

$4=-2t^3+6t+8$

$t^3-3t-2=0$

$(t+1)(t^2-t-2)=0$

$(t+1)^2(t-2)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$t=-1$ のとき接線は $y=-2x+6$

$x^3+3x^2+x+7=-2x+6$ として

$x^3+3x^2+3x+1=0$

$(x+1)^3=0$ $\therefore x=-1$

より不適

$t=2$ のとき接線は $y=25x-21$

$x^3+3x^2+x+7=25x-21$ として

$x^3+3x^2-24x+28=0$

$(x-2)^2(x+7)=0$ $\therefore x=2, -7$

より題意をみたす

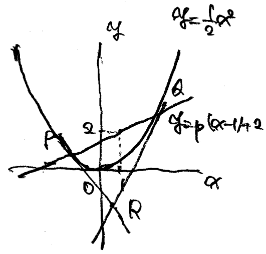
よって求める接線は

$y=25x-21$

<point>

1. 接線、法線の方程式.

5



1. $\frac{1}{2}x^2=p(x-1)+2$ として

$x^2-2px+2p-4=0$

$\therefore x=p\pm\sqrt{p^2-2p+4}$

$x_1=\boxed{p-\sqrt{p^2-2p+4}}$

$x_2=\boxed{p+\sqrt{p^2-2p+4}}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$ とおくと $f'(x)=x$

$y=f(x)$ の P における接線は

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

$y-\frac{1}{2}x_1^2=x_1(x-x_1)$

$\therefore y=x_1x-\frac{1}{2}x_1^2$

$x_1^2=p^2-2p\sqrt{p^2-2p+4}+p^2-2p+4$
$=2p^2-2p+4-2p\sqrt{p^2-2p+4}$

$=\boxed{(p-\sqrt{p^2-2p+4})x-p^2+p-2+p\sqrt{p^2-2p+4}}$

Qにおける接線は

$y=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2$

$x_1x-\frac{1}{2}x_1^2=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2$ として

$(x_1-x_2)x=\frac{1}{2}(\underbrace{x_1^2-x_2^2}_{(x_1+x_2)(x_1-x_2)})$

$\therefore x=\frac{x_1+x_2}{2}$ $y=\frac{x_1+x_2}{2}\cdot x_1-\frac{1}{2}x_1^2=\frac{1}{2}x_1x_2$

解と係数の関係から

$x_1+x_2=2p$, $x_1x_2=2p-4$ より

$R(p, p-2)$

$\overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}x_2-p\\ \frac{1}{2}x_2^2-p+2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RP}=\begin{pmatrix}x_1-p\\ \frac{1}{2}x_1^2-p+2\end{pmatrix}$

△PQRの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\left|(x_1-p)\left(\frac{1}{2}x_2^2-p+2\right)-(x_2-p)\left(\frac{1}{2}x_1^2-p+2\right)\right|$

$=\frac{1}{4}(x_2-x_1)^3=\frac{1}{4}\{2\sqrt{p^2-2p+4}\}^3$

$=\boxed{2(\sqrt{p^2-2p+4})^3}$

$= 2\left(\sqrt{(p-1)^2+3}\right)^3$

$p=1$ のとき 最小で

最小値 $\boxed{6\sqrt{3}}$

II. (1) $x^3+2x^2-5x-6=0$ として

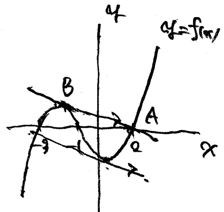
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x-2)(x^2+4x+3)=0$

$(x-2)(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=2, -3, -1$ //

(2) $f'(x)=3x^2+4x-5$



$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3+2t^2-5t-6)=(3t^2+4t-5)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+4t-5)x-2t^3-2t^2-6$

これが $(2,0)$ を通るとき

$-2t^3+4t^2+8t-16=0$

$t^3-2t^2-4t+8=0$

$t^2(t-2)-4(t-2)=0$

$(t-2)^2(t+2)=0$

$t\neq 2$ より $t=-2$

求める直線は

$y=-x+2$ // $(x+y-2=0)$

(3) 傾き -1 の接線が C に接するとき

$3t^2+4t-5=-1$

$3t^2+4t-4=0$ $\quad \begin{matrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{matrix}$

$(t+2)(3t-2)=0$

$t\neq -2$ のとき $t=\frac{2}{3}$ $\qquad P\left(\frac{2}{3}, -\frac{220}{27}\right)$

P がこの点になるとき $\triangle APB$ の面積は最大と なりこのときの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{4^2+4^2}}_{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\left|\frac{2}{3}-\frac{220}{27}-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\cdot\frac{256}{27}=\frac{512}{27}$$ //

$\boxed{6}$

(1) $f(x)=x^3+ax,\ g(x)=bx^2+c$ とおく.

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $(-1,0)$ で共通接線をもつとき

$\begin{cases} f(-1)=g(-1)=0 & -1-a=b+c=0 \cdots ① \\ f'(-1)=g'(-1) & 3+a=-2b \cdots ② \end{cases}$

①, ②より

$a=-1,\ b=-1,\ c=1$ //

(2) $f(x)=a\overset{x^2+2x+1}{(x+1)^2},\ g(x)=x^3-x$ とする

$f'(x)=2ax+2a,\ g'(x)=3x^2-1$

C_1 と C_2 が $x=t$ で共通接線をもつとき

$\begin{cases} f(t)=g(t) : a(t+1)^2=\overset{t(t+1)(t-1)}{t^3-t} \cdots ① \\ f'(t)=g'(t) : 2a(t+1)=3t^2-1 \cdots ② \end{cases}$

②から $t\neq -1$ より

①は $a(t+1)=t(t-1)$

①, ②より

$2t(t-1)=3t^2-1$

$t^2+2t-1=0 \quad \therefore t=-1\pm\sqrt{2}$

よって

$\pm\sqrt{2}a=(-1\pm\sqrt{2})(-2\pm\sqrt{2})$ $\qquad (-1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-3+2\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}(-1\pm\sqrt{2})(\pm 1-\sqrt{2})$ $\qquad (-1-\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$

$= \begin{matrix}-3+2\sqrt{2}\\ 3+2\sqrt{2}\end{matrix}$

$\therefore a=2-\frac{3}{\sqrt{2}},\ -2-\frac{3}{\sqrt{2}}$ //

(3) $f(x)=kx^2,\ g(x)=-x^2+1$ とおく

$f'(x)=2kx,\ g'(x)=-2x$

共有点の x 座標を $x=t$ とおくと

$\begin{cases} f(t)=g(t) : kt^2=-t^2+1 \cdots ① \\ f'(t)g'(t)=-1 : 2kt\cdot(-2t)=-1 \cdots ② \end{cases}$

②より $k\neq 0$ であるから

$t^2=\frac{1}{4k}$

①より

$\frac{1}{4}=-\frac{1}{4k}+1$

$\frac{1}{4k}=\frac{3}{4} \quad \therefore k=\frac{1}{3} \qquad t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

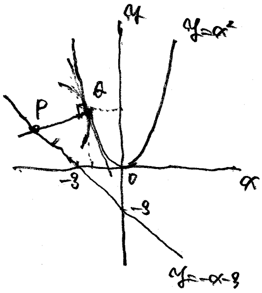
共有点は

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ //

<point>

1. 共通接線 1.

7.



$f(x)=x^2$ とおく

$f'(x)=2x$

共通接線は $y=f(x)$ の

$(-2,4)$ における接線であるから

$y-4=f'(-2)(x+2)$

$y-4=-4(x+2)$

$\therefore y=-4x-4$

Pは $y=-x-3$ と $y=f(x)$ のQにおける法線

$y-4=-\frac{1}{f'(-2)}(x+2)$

$y-4=\frac{1}{4}(x+2)$

$\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$

の交点であるから

$-4x-4=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$

$\frac{17}{4}x=-\frac{17}{2}$ $\quad\therefore x=-2$

よって $a=-2,\ b=-1$

8.

I. (1) $2x^2=-x^2+2x-a$ として

$3x^2-2x+a=0$

が実数解をもたなければよいから

判別式をDとして $D<0$ より

$D/4=1-3a<0$ $\quad\therefore a>\frac{1}{3}$

(2) $f(x)=2x^2$ とおく

$f'(x)=4x$

$(t,2t^2)$ における C_1 の接線は

$y-2t^2=f'(t)(x-t)$

$y-2t^2=4t(x-t)$

$\therefore y=4tx-2t^2$

これが C_2 にも接するとき

$-x^2+2x-a=4tx-2t^2$ として

$x^2+2(2t-1)x-2t^2+a=0$

が重解をもてばよいから

判別式を D' とすると $D'=0$ より

$D'/4=(2t-1)^2-(-2t^2+a)$

$=6t^2-4t+1-a=0$ —①

$\therefore a=6t^2-4t+1$

(3) ①の2解を α,β とする

題意を満たすとき

$f'(\alpha)f'(\beta)=-1$

$16\alpha\beta=-1$

解と係数の関係から $\alpha\beta=\frac{1-a}{6}$ より

$16\cdot\frac{1-a}{6}=-1$

$1-a=-\frac{3}{8}$ $\quad\therefore a=\frac{11}{8}$

II $f(x)=-2x^3+3,\ g(x)=-2x^3-1$ とする

$f'(x)=-6x^2$ $\quad g'(x)=-6x^2$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(-2t^3+3)=-6t^2(x-t)$

$\therefore y=-6t^2x+4t^3+3$

$y=g(x)$ の $x=s$ 〃

$y-g(s)=g'(s)(x-s)$

$y-(-2s^3+1)=-6s^2(x-s)$

$\therefore y=-6s^2x+4s^3-1$

これらが一致するとき

$\begin{cases}-6t^2=-6s^2 & —① \\ 4t^3+3=4s^3-1 & —② \end{cases}$

①より

$s=\pm t$

②より

$s=t$ のとき $\quad 4t^3+3=4t^3-1$ 解なし

$s=-t$ 〃 $\quad 8t^3=-4$

$\therefore t^3=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

よって求める接線は

$y=-3\sqrt[3]{2}x+1$

<point>

1. 共通接線の2.