

高2数学 基本問題演習 演習 30. 微分法(2)

① [(1) 2008 中央大 (2) 2011 慶応義塾大]

(1) 3次関数 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 6x - 1$ は $x = \square$ で極小値 \square をとる。

② [(1) 2019 中央大 (2) 2005 岡山大]

(1) 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ が $x = -2$ で極大値をとり、 $x = 4$ で極小値をとるように、定数 a, b の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ の極大値が5、極小値が1となるときの、定数 a, b の値を求めよ。

③ [2016 中央大]

実数 a に対し、3次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(2a - 1)x - 5$ を考える。

(1) $f(x)$ に極大値が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ に極大値が存在し、それが3以上であるような a の値の範囲を求めよ。

④ [I. 芝浦工業大 II. 2002 法政大 III. 2007 小樽商科大]

I. 関数 $x^3 - 3ax^2 + ax + 1$ ($a > 0$) が区間 $-1 < x < 1$ で極大値と極小値をもつための条件は \square である。

II. $f(x) = x^3 + kx^2 + x + 1$ が $x > 0$ の領域で極小値をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

III. 3次関数 $f(x) = 2x^3 - 3(a + 1)x^2 + 6ax + a$ が $x > 2$ の範囲で常に増加するための定数 a に関する必要十分条件を求めよ。

表題

5 [2004 名古屋市立大]

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ とする.

- (1) 関数 $y = f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値, $x = \beta$ で極小値をとる. α, β を求めよ.
また, 2 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ の中点 P が曲線 $y = f(x)$ 上にあることを示せ.
- (2) 点 P に関して平面上の点 (x, y) と対称となる点の座標を x, y で表せ.
- (3) 関数 $y = f(x)$ のグラフは点 P に関して点対称であることを示せ. ただし, 一般に曲線 C が点 P に関して点対称であるとは, 点 Q が C 上にあるとき, 点 Q の点 P に関して対称である点 R も C 上にあることである.

6 [(1) 2002 慶応義塾大 (2) 1999 防衛大学校]

- (1) 関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ ($0 \leq x \leq 3$) は, $x =$ で最大値 1 をとる.
- (2) 関数 $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 1|$ について, $0 \leq x \leq 3$ の範囲での最大値を求めよ.

7 [I. 高知大 II. 早稲田大 III. 一橋大 IV. 関西学院大 V. 信州大]

I. 実数 x に対して, $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$ とおく.

- (1) $y = f(x)$ のグラフをかけ.
- (2) $f(x-2) = f(x)$ を満たす実数 x をすべて求めよ.
- (3) 実数 s に対して, $f(x)$ の $x \leq s$ の範囲における最小値を $g(s)$ とおく. このとき, $t = g(s)$ のグラフをかけ.
- (4) 実数 s に対して, $f(x)$ の $s-2 \leq x \leq s$ の範囲における最小値を $h(s)$ とおく. このとき, $t = h(s)$ のグラフをかけ.

II. a を実数とする. 関数 $f(x) = x^3 - ax$ を考える.

- (1) $f(x)$ が区間 $-1 < x < 1$ において極値をとるような a の値の範囲を求めよ.
- (2) $f(x)$ の区間 $-1 \leq x \leq 1$ における最小値が $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる a の値をすべて求めよ.

III. a を定数とし, $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ とする. $x \leq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ.

IV. k を $0 < k < 1$ である実数とする. 関数 $f(x) = x(x-3k)^2$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を求めよ. また, 最大値が $\frac{1}{2}$ であるとき, k の値を求めよ.

表題

V. a は定数とする. 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6ax + 1$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最小値を求めよ.

8 [I. 2001 東邦大 II. 2011 津田塾大]

I. 1 辺が x 軸上にあつて, 放物線 $y = 6x - x^2$ と x 軸とで囲まれた部分に内接する長方形の面積の最大値を求めよ. また, そのときの長方形の周の長さを求めよ.

II. 関数 $y = x^2$ のグラフ上に点 $A(-1, 1)$, $B(p, p^2)$, $C(q, q^2)$, $D(1, 1)$ をとる. ただし, $-1 < p < q < 1$ とする.

- (1) 四角形 $ABCD$ の面積を p, q を用いて表せ.
- (2) p を定数として固定して, q だけを変化させて考える. 四角形 $ABCD$ の面積を最大にする q の値を p で表せ.
- (3) q を (2) で求めた値とし, 今度は p を変化させて考える. 四角形 $ABCD$ の面積を最大にする p の値を求めよ.

9 [1997 中央大]

半径 1 の球に含まれる直円錐(すい)でその側面積が最大になるものに対し, その高さ, 底面の半径, および側面積を求めよ.