基本問題演習20. 漸化式(2)

1

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n \cdots ① \\ b_{n+1}=2a_n+b_n \cdots ② \end{cases}$$

①+②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$

$\{a_n+b_n\}$は初項 $a_1+b_1=3$
公比3の等比数列より

$$a_n+b_n=3^n \cdots ③$$

①−②より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$$

$\{a_n-b_n\}$は初項 $a_1-b_1=-1$
公比−1の等比数列より

$$a_n-b_n=(-1)^n \cdots ④$$

③+④より

$$2a_n=3^n+(-1)^n \quad \therefore a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$$

③−④より

$$2b_n=3^n-(-1)^n \quad \therefore b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{2}_{//}$$

<point>

1. 連立漸化式〜係数対称型

2

(1) $$\begin{cases} a_{n+1}=6a_n+2b_n \cdots ① \\ b_{n+1}=-2a_n+2b_n \cdots ② \end{cases}$$

①+②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$$

$\{a_n+b_n\}$は初項 $a_1+b_1=4$
公比4の等比数列より

$$a_n+b_n=4^n \quad (c_n=4^n) \cdots ③$$

(2) ①,③より

$$a_{n+1}=6a_n+2(4^n-a_n)$$
$$=4a_n+2\cdot 4^n$$

両辺 $4^{n+1}$ で割って

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{2}$$

$b_n=\frac{a_n}{4^n}$ とおくと $b_1=\frac{a_1}{4}=\frac{1}{2}$

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$$

$\{b_n\}$は初項 $b_1=\frac{1}{2}$
公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より

$$b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)$$
$$=\frac{n}{2}$$

$b_n=\frac{a_n}{4^n}$ より

$$a_n=4^n b_n=2n\cdot 4^{n-1}{}_{//}$$

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 4^{k-1}$ とおく.

$$S_n=1\cdot 1+2\cdot 4+\cdots\cdots+n\cdot 4^{n-1}$$
$$-)\ 4S_n=\qquad 1\cdot 4+\cdots\cdots+(n-1)4^{n-1}+n\cdot 4^n$$
$$-3S_n=1+4+\cdots\cdots+4^{n-1}-n\cdot 4^n$$
$$=\frac{4^n-1}{4-1}-n\cdot 4^n$$
$$=\frac{1-3n}{3}\cdot 4^n-\frac{1}{3}$$

$$\therefore S_n=\frac{3n-1}{9}\cdot 4^n+\frac{1}{9} \qquad \therefore \sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{6n-2}{9}\cdot 4^n+\frac{2}{9}{}_{//}$$

<point>

1. 連立漸化式〜係数非対称型
$\{a_n+b_n\}$. $\{a_n-b_n\}$のいずれかが等比数列になる.

3

(1) $$a_{n+1}+kb_{n+1}=(a_n+b_n)+k(4a_n+b_n)$$
$$=(4k+1)a_n+(k+1)b_n$$
$$=(4k+1)\left\{a_n+\frac{k+1}{4k+1}b_n\right\}$$

$k=\frac{k+1}{4k+1}$ として

$$k(4k+1)=k+1$$
$$4k^2=1 \qquad \therefore k=\pm\frac{1}{2}{}_{//}$$

(2) $k=\frac{1}{2}$ のとき

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}b_{n+1}=3\left(a_n+\frac{1}{2}b_n\right)$$

$\{a_n+\frac{1}{2}b_n\}$は初項 $a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{3}{2}$
公比3の等比数列より

$$a_n+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n \cdots ①$$

$k=-\frac{1}{2}$ のとき

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=-\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$$

$\left\{a_n-\frac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $a_1-\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}$

公比 $-1$ の等比数列より

$$a_n-\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{n-1} \cdots ②$$

①、②より

$$a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}}{4},\quad b_n=\frac{3^n-(-1)^{n-1}}{2} \ /\!/$$

<point>

1. 連立漸化式～係数対称型
 $\{a_n+b_n\}$ も $\{a_n-b_n\}$ も等比数列にならない

$\boxed{4}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと

$S_n=2a_n+n \cdots ①$

$n=1$ のとき

$S_1=2a_1+1$

$a_1=2a_1+1 \quad \therefore a_1=-1$

$n\geqq 2$ のとき

$S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1) \cdots ②$

①−②より

$S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1$

$a_n=2a_n-2a_{n-1}+1$

$\therefore a_n=2a_{n-1}-1$

$a_{n+1}=2a_n-1 \quad (n\geqq 1)$ $\qquad \alpha=2\alpha-1 \quad \therefore \alpha=1$

$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

$\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=-2$

公比 $2$ の等比数列より

$a_n-1=-2^n$

$\therefore a_n=-2^n+1 \ /\!/$

<point>

1. $a_n$ と $S_n$ を含む漸化式

$\boxed{5}$

(1) $a_2^2a_1=a_2+3$

$2a_2^2-a_2-3=0$ $\qquad \begin{matrix}1 \\ 2\end{matrix}\times\begin{matrix}1 \\ -3\end{matrix}$

$(a_2+1)(2a_2-3)=0$

$a_2>0$ より $a_2=\frac{3}{2}$

$a_3^2a_2=a_3+\frac{4}{3}$

$\frac{3}{2}a_3^2-a_3-\frac{4}{3}=0$

$9a_3^2-6a_3-8=0$ $\qquad \begin{matrix}3 \\ 3\end{matrix}\times\begin{matrix}2 \\ -4\end{matrix}$

$(3a_3+2)(3a_3-4)=0$

$a_3>0$ より $a_3=\frac{4}{3}$

(2) $a_n=\frac{n+1}{n}$ と推定できる。

(i) $n=1$ のとき

$a_1=2$ より成り立つ

(ii) $n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_k=\frac{k+1}{k}$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$a_{k+1}^2a_k=a_{k+1}+\frac{2(k+2)}{k(k+1)}$

$\frac{k+1}{k}a_{k+1}^2-a_{k+1}-\frac{2(k+2)}{k(k+1)}=0$

$(k+1)^2a_{k+1}^2-k(k+1)a_{k+1}-2(k+2)=0$

$\begin{matrix}k+1 \\ k+1\end{matrix}\times\begin{matrix}2 \\ -(k+2)\end{matrix} \quad \begin{matrix}2(k+1) \\ -(k+1)(k+2) \\ \hline -(k+1)k\end{matrix}$

$\{(k+1)a_{k+1}+2\}\{(k+1)a_{k+1}-(k+2)\}=0$

$a_{k+1}>0$ より $a_{k+1}=\frac{k+2}{k+1}$

より成り立つ

(i),(ii)から数学的帰納法より

$a_n=\frac{n+1}{n} \quad (n=1,2,\cdots) \ /\!/$

<point>

1. 解けない漸化式①
 → 一般項を推測して帰納法

$\boxed{6}$

(1) ・$6a_1^2=a_1a_2(2a_2-1)$

$6=a_2(2a_2-1)$

$2a_2^2-a_2-6=0$ $\qquad \frac{1}{2}\times\frac{-2}{3}$

$(a_2-2)(2a_2+3)=0$

$a_2>0$ より $a_2=2$

・$6(a_1^2+a_2^2)=a_2a_3(2a_3-1)$

$\overset{15}{30}=2a_3(2a_3-1)$

$2a_3^2-a_3-15=0$ $\qquad \frac{1}{2}\times\frac{-3}{5}$

$(a_3-3)(2a_3+5)=0$

$a_3>0$ より $a_3=3$ //

(2) $a_n=n$ と推測できる

i) $n=1$ のとき

$a_1=1$ より成り立つ

ii) $n=1,2,\cdots,k$ ($k=1,2,\cdots$) のとき成り立つと仮定して

$a_l=l$ ($l=1,2,\cdots,k$)

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$6(1^2+2^2+\cdots+k^2)=ka_{k+1}(2a_{k+1}-1)$

$k(k+1)(2k+1)=2ka_{k+1}^2-ka_{k+1}$

$2a_{k+1}^2-a_{k+1}-(k+1)(2k+1)=0$ $\qquad \frac{1}{2}\times\frac{-(k+1)}{2k+1}$

$\{a_{k+1}-(k+1)\}\{a_{k+1}+(2k+1)\}=0$

$a_{k+1}>0$ より $a_{k+1}=k+1$

より成り立つ

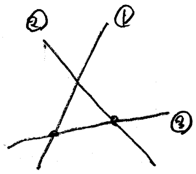
i), ii) から数学的帰納法により

$a_n=n$ ($n=1,2,\cdots$) //

$\boxed{7}$.

(1) $n$本の直線を引くとき

交点の数を $a_n$ とすると




$a_{n+1}=a_n+n$

$a_{n+1}-a_n=n$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと $b_1=1$ $\qquad a_1=0.\ a_2=1$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ ($n\geqq2$)

$=\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=\frac{(n-1)n}{2}$ ($n\geqq2$)

これは $n=1$ のときも成り立つから

$a_n=\frac{(n-1)n}{2}$ //

(2) $n$本の直線を引くとき

平面が $c_n$ 個の部分に分けられるとすると

$c_{n+1}=c_n+(n+1)$ $\qquad c_1=2$, $c_2=4$

$c_{n+1}-c_n=n+1$

$d_n=c_{n+1}-c_n$ とおくと $d_1=2$

$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k$ ($n\geqq2$)

$=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$c_n=2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ //

〈point〉

1. 漸化式(文章題)

$\boxed{8}$

(1) $a_1=8000$

$a_2=\frac{9}{10}a_1+200=7400$.

$a_3=\frac{9}{10}a_2+200=6860$ ℓ //

(2) $a_{n+1}=\frac{9}{10}a_n+200$ //

(3) $a_{n+1}-2000=\frac{9}{10}(a_n-2000)$ $\qquad \alpha=\frac{9}{10}\alpha+200$ ∴ $\alpha=2000$

$\{a_n-2000\}$ は初項 $a_1-2000=6000$

公比 $\frac{9}{10}$ の等比数列より

$a_n-2000=6000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

∴ $a_n=2000+6000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

$a_n<2400$ となるとき

$2000+6000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}<2400$

$6000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}<400$

$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}<\frac{1}{15}$

両辺常用対数をとって

$(n-1)\log_{10}\frac{9}{10}<\log_{10}\frac{1}{15}$

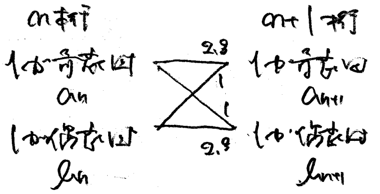
$\log_{10}\frac{9}{10}=2\log_{10}3-1=-0.0558$, $\quad \log_{10}\frac{1}{15}=\log_{10}2-\log_{10}3-1=-1.1761$

$n-1>21.07\cdots$

∴ $n>22.07\cdots$ $\qquad$ 23回目の車検 //

9

(1)




$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \cdots ① & a_1=1,\ b_1=2. \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \cdots ② \end{cases}$

(2) ①+② より

$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$

$\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=3$
公比 3 の等比数列より

$a_n+b_n=3^n$ ← 解かなくても明らか —①'
(重複順列)

①−② より

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

$\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=-1$
の定数列より

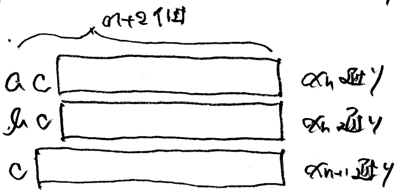
$a_n-b_n=-1$ —②'

①', ②' より

$a_n=\frac{3^n-1}{2}$, $b_n=\frac{3^n+1}{2}$ //

10

(1)




$x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$ //

(2) $x_{n+2}+x_{n+1}=2(x_{n+1}+x_n)$

$y_n=x_{n+1}+x_n$ とおくと $y_1=x_2+x_1=8$

$y_{n+1}=2y_n$

$\{y_n\}$ は初項 $y_1=8$
公比 2 の等比数列より

$y_n=8\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}$ //

(3) $y_n=x_{n+1}+x_n$ より

$x_{n+1}+x_n=2^{n+2}$

$x_{n+1}=-x_n+2^{n+2}$

両辺 $2^{n+1}$ で割って

$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_n}{2^n}+2$

$a_n=\frac{x_n}{2^n}$ とおくと $a_1=\frac{x_1}{2}=\frac{3}{2}$

$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+2$　　$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+2$　∴ $\alpha=\frac{4}{3}$

$a_{n+1}-\frac{4}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{4}{3}\right)$

$\{a_n-\frac{4}{3}\}$ は初項 $a_1-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$
公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より

$a_n-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

∴ $a_n=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}$

$a_n=\frac{x_n}{2^n}$ より

$x_n=2^n a_n$
$=\frac{1}{3}(-1)^{n-1}+\frac{2^{n+2}}{3}=\frac{2^{n+2}+(-1)^{n-1}}{3}$ //

<point>

1. 場合の数と漸化式
最初の1手や、最後の1手で漸化式を作る.