高2数学　基本問題演習　34. 積分法(3)

$\boxed{1}$ [(1) 2001 自治医科大　(2) 1997 昭和薬科大　(3) 2011 愛媛大]

(1) 領域 $0 \leqq y \leqq -x^2+3x$ の面積を A，領域 $0 \geqq y \geqq x^2-9$ の面積を B とする．$\dfrac{B}{A}$ を求めよ．

(2) $y \geqq 2x^2$，$2x+2 \leqq y \leqq 2x+4$ の領域の面積は $\boxed{}$ である．

(3) 2 つの曲線 $y=x^2$，$y=-x^2+2x+1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ [Ⅰ．2017 岩手大　Ⅱ．2008 東洋大]

Ⅰ．放物線 C：$y=2x-x^2$ と直線 ℓ：$y=ax$ について，定数 a が $0<a<2$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2)　直線 ℓ が，放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を 2 等分するときの a の値を求めよ。

Ⅱ．2 つの曲線 $y=x^2$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+1$ の 2 つの交点の x 座標をそれぞれ α，β (ただし $\alpha<\beta$) とする。

(1)　2 つの曲線で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S={}^{ア}\boxed{}(\beta-\alpha)^{{}^{イ}\boxed{}}={}^{ウ}\boxed{}$$

である。

(2)　2 つの交点を通る曲線 $y=ax^2+bx+c$ は，S を 2 等分するという。このとき，a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{3}$ [Ⅰ．1996 創価大　Ⅱ．2008 滋賀県立大]

Ⅰ．放物線 $y=x^2$ と点 $(1, 2)$ を通る直線とで囲まれる領域の面積の最小値を求めよ．

Ⅱ．(1)　等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを示せ。ただし，α と β は実数である。

(2)　相異なる 2 点で交わる 2 つの放物線 C_1：$y=x^2$ と C_2：$y=-x^2+ax+b$ (a，b は実数) によって囲まれた図形の面積を S とする。C_2 の頂点が直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ の線上にあるとき，S のとりうる最大値を求めよ。

$\boxed{4}$ [2012 西南学院大]

放物線 $L：y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる 2 点で接している。ただし，L と C が点 P で接しているとは，L と C が点 P を共有し，さらに L と C が点 P において共通の接線をもつことを意味する。

(1)　2 つの接点の座標を求めよ。

(2)　円 C の方程式を求めよ。

(3)　2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ [Ⅰ. 2004 自治医科大　Ⅱ. 1997 日本女子大　Ⅲ. 2003 滋賀大]

Ⅰ. 2 次曲線 $C：y=x^2-4x$ について，点 $(3,\ -3)$ における接線を L とする．曲線 C，直線 L および y 軸で囲まれた領域の面積を求めよ．

Ⅱ. 放物線 $y=x^2$ と，点 $(1, -3)$ を通りこの放物線に接する 2 直線とで囲まれる図形の面積を求めよ．

Ⅲ. 2 つの放物線 $C_1：y=x^2$，$C_2：y=x^2-4x+8$ に共通な接線を l とし，C_1，C_2 との接点をそれぞれ P_1，P_2 とする．

(1)　P_1，P_2 の x 座標を求めよ．

(2)　2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{6}$ [Ⅰ. 2001 新潟大　Ⅱ. 東京薬科大]

Ⅰ. xy 平面上に，曲線 $C：y=x^3-x$ と C 上の点 $\mathrm{A}\,(-1,\ 0)$ があるとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 A を通る直線と C との共有点が，A を含めて 2 個であるような 2 本の直線 l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　C と l_1 で囲まれた部分の面積，C と l_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

Ⅱ．a を定数とする 2 つの曲線 $y=x^3-x+a$, $y=x^2$ は，第 1 象限内の 1 点で接線を共有する．

(1) $a=\boxed{}$ である．

(2) 共通な接線の方程式は $\boxed{}$ であり，接点の座標は $\boxed{}$ である．

(3) 2 つの曲線のもう 1 つの共有点の座標は $\boxed{}$ である．

(4) 2 つの曲線で囲まれる部分の面積は $\boxed{}$ である．

$\boxed{7}$ [2014 西南学院大]

曲線 C_1：$y=x^3-3x$ と，C_1 を x 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる曲線 C_2 との交点の x 座標は，$\dfrac{{}^{ア}\boxed{}\pm\sqrt{{}^{イ}\boxed{}}}{{}^{ウ}\boxed{}}$ である。

$\displaystyle\int_a^b(x-a)(x-b)dx=\frac{{}^{エ}\boxed{}}{{}^{オ}\boxed{}}(b-a)^3$ を利用すると，C_1 と C_2 で囲まれる面積は，

$\dfrac{{}^{カ}\boxed{}\sqrt{{}^{キ}\boxed{}}}{{}^{ク}\boxed{}}$ である。

$\boxed{8}$ [1997 東京理科大]

曲線 $y=f(x)=x^4-2x^3-3x^2+5x+5$ 上の異なる 2 点 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ において，
直線 $y=g(x)=ax+b$ がこの曲線に接するとする．ただし，$\alpha<\beta$ とする．
このとき，α, β, a, b の値を求めると

$\alpha={}^{ア}\boxed{}$, $\beta={}^{イ}\boxed{}$, $a={}^{ウ}\boxed{}$, $b={}^{エ}\boxed{}$ である．

また，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とすると，$S={}^{オ}\boxed{}$ である．

高2数学　基本問題演習　34. 積分法(3)

$\boxed{9}$ [(1) 2008 立命館大　(2) 2002 久留米大]

(1) 2 つの放物線 $y=x^2-4$ と $y=-x^2+4$ とで囲まれた部分の面積は ${}^{ア}\boxed{}$ となり，放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=2x+5$ とで囲まれた部分の面積は ${}^{イ}\boxed{}$ となる。よって，曲線 $y=|x^2-4|$ と直線 $y=2x+5$ とで囲まれた部分の面積は ${}^{ウ}\boxed{}$ となる。

(2) 曲線 $y=|3x^2-6x|$ と直線 $y=3x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．