高2数学　基本問題演習　27. 軌跡と領域(1)

1 [2023 千葉工業大]

xy 平面上に異なる 3 点 A$(0,\ -3)$，B$(6,\ 5)$，P$(X,\ Y)$ がある。$\angle$APB$=90^\circ$ であるとき，X，Y は $X^2+Y^2-{}^{ア}\boxed{}X-{}^{イ}\boxed{}Y-{}^{ウ}\boxed{}=0$ を満たす。

2 [(1) 2013 名城大　(2) 2010 津田塾大]

(1) xy 平面上に，2 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 0)$ を端点とする線分 OA と点 P がある。P が OP：AP$=1:1$ を満たしながら動くとき，P の描く軌跡は直線であり，その方程式は ${}^{ア}\boxed{}$ である。また，P が OP：AP$=1:2$ を満たしながら動くとき，P の描く軌跡は円であり，その方程式は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2) 座標平面上で点 $(0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。C に外接し x 軸に接する円の中心 P$(a,\ b)$ が描く図形の方程式を求めよ。

3 [Ⅰ．1997 北海道薬科大　Ⅱ．2001 西南学院大]

Ⅰ．関数 $f(x)=x^2+4x-4-4a(x-1)$ について

(1)　頂点の座標 (x,y) を a で表せ.

(2)　$0<a\leqq 2$ のとき，頂点の描く軌跡の方程式を求めよ.

(3)　(2) で得た軌跡の方程式のグラフの概形を描け.

Ⅱ．方程式 $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$ が円を表すとき，定数 k の値の範囲を求めよ．また，k の値がこの範囲で変化するとき，この円の中心の軌跡を求めよ.

4 [Ⅰ．2007 青山学院大　Ⅱ．1999 名城大]

Ⅰ．直線　：$y=k(x+1)$ および放物線 C：$y=x^2$ について次の問いに答えよ。
ただし，k は実数である。

(1)　直線 ℓ と放物線 C が異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ。

(2)　k が (1) で求めた範囲を動くとき，ℓ と C の 2 つの交点の中点が描く軌跡を求め，xy 平面上に図示せよ。

Ⅱ．xy 平面上に，円 C：$(x-2)^2+y^2=1$，直線 l：$y=kx$（k は実数の定数）がある.

(1)　C と l が異なる 2 点 A，B で交わるとき，k のとりうる値の範囲を求めよ.

(2)　(1) のとき，線分 AB の中点 P が描く軌跡を求め，図示せよ.

高2数学　基本問題演習　27. 軌跡と領域(1)

5 [1996 摂南大]

m がすべての実数値をとりながら変わるとき，直線 $y=mx+8$ と直線 $x+my=6$ との交点は中心の座標が $\left(^{ア}\boxed{},\ ^{イ}\boxed{}\right)$ で半径が $^{ウ}\boxed{}$ の円から座標が $\left(^{エ}\boxed{},\ ^{オ}\boxed{}\right)$ である点を除いた図形を描く．

6 [(1) 2000 千葉工業大　(2) 2002 小樽商科大　(3) 2009 立教大　(4) 2011 関西大]

(1) 放物線 $y=x^2$ 上を動く点 P と点 (3, 5) を結ぶ線分の中点は放物線 $\boxed{}$ 上を動く．

(2) xy 平面上に定点 A (0, 1) と点 P がある．線分 AP の中点が放物線 $y=x^2$ 上にあるような点 P の軌跡の方程式を求めよ．

(3) 座標平面上の円 $x^2+y^2=1$ 上を動く点 P と点 A (2, 0) を結ぶ線分の中点の軌跡の方程式を求めよ。

(4) 直線 ℓ：$y=2x+1$ がある。ℓ 上にない点 P$(a,\ b)$ の ℓ に関する対称な点を P$'(a',\ b')$ とする。a'，b' をそれぞれ a，b を用いて表すと $a'=\ ^{ア}\boxed{}$，$b'=\ ^{イ}\boxed{}$ である。

点 P が直線 $y=-3x$ 上の点 P$(t,\ -3t)$ であるとき，P$'$ の座標を t で表すと $^{ウ}\boxed{}$ である。したがって，P が直線 $y=-3x$ 上の $x\geqq 0$ の範囲を動くとき，P$'$ は直線 $y=\ ^{エ}\boxed{}$ 上の $x\leqq\ ^{オ}\boxed{}$ の範囲を動く。

7 [1998 東北学院大]

座標平面上に直線 l：$3x+4y=5$ がある．l 上の点 P と原点 O を結ぶ線分上に OP·OQ$=1$ となるように点 Q をとる．

(1)　P，Q の座標をそれぞれ $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ とするとき，x と y をそれぞれ X と Y で表せ．

(2)　P が l 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

8 [2003 名古屋市立大]

実数 x，y が $x^2+y^2=1$ という関係を満たしながら動くとき，点 P$(x+y,\ xy)$ の軌跡を求め，図示せよ．