

高2数学 基本問題演習 演習 31. 微分法(3)

1 [2018 横浜市立大]

関数 $f(x)$ を $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ とする。

- (1) 導関数 $f'(x)$ について、方程式 $f'(x) = 0$ がただ1つの実数解をもつことを証明せよ。
- (2) (1)におけるただ1つの実数解を x_0 とする。このとき $a \leq x_0 \leq a + \frac{1}{4}$ を満たす実数 a を1つ求めよ。
- (3) 不等式 $\frac{5}{8} < f(x_0) < \frac{11}{16}$ を証明せよ。

2 [I. 2001 高知大 II. 2009 早稲田大]

I. 方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x - k = 0$ は、異なる3つの実数解 α, β, γ をもつとする。

$\alpha < \beta < \gamma$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 定数 k の値の範囲を求めよ。
- (2) $-2 < \beta < -\frac{1}{2}$ となるとき、 α, γ の値の範囲を求めよ。

II. 方程式 $|x^3 - x| = x + k \dots\dots$ ① の実数解について考察する。ただし、 k は実数の定数とする。

(1) 方程式①が異なるちょうど3個の実数解をもつような k の値は、

$k_1 = \sqrt{\quad}$, または $k_2 = \sqrt{\quad}$ である。ただし、 $k_1 < k_2$ とする。

- (2) $k = k_2$ のとき、①の3個の実数解を求めよ。
- (3) $k_1 < k < k_2$ のとき、①の実数解の個数を求めよ。

3 [I. 2019 長崎大 II. 2011 名古屋大 III. 2025 神戸大]

I. 3次方程式 $x^3 - 3px + p = 0$ が異なる3つの実数解をもつように、実数 p の値の範囲を定めよ。

II. (1) 関数 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ。

(2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ の接線で、点 $(\frac{3}{2}, 0)$ を通るものをすべて求めよ。

(3) p を定数とする。 x の3次方程式 $x^3 - x^2 = p(x - \frac{3}{2})$ の異なる実数解の個数を求めよ。

高2数学 基本問題演習 演習 31. 微分法(3)

Ⅲ. k を実数とする。 $f(x)$ と $g(x)$ を $f(x) = |x^3 - x|$, $g(x) = k(x+1)$ とおき, 曲線 $y = f(x)$ を C , 直線 $y = g(x)$ を l とする。

- (1) 曲線 C の概形をかけ。ただし, 関数 $f(x)$ の極大値を調べる必要はない。
- (2) 曲線 C と直線 l がちょうど4つの共有点をもつような k の値を求めよ。

4 [I. 2005 昭和薬科大 II. 2012 明治大]

I. 3次方程式 $x^3 - 3a^2x + 4a = 0$ について

- (1) 異なる3個の実数解をもつ a の値の範囲を求めよ。
- (2) ただ1個の実数解をもつ a の値の範囲を求めよ。

II. 曲線 $y = x^3 - ax^2 + x + 4$ と直線 $y = x$ が, 異なる2点のみを共有するとき, $a = \sqrt{\quad}$ であり, $x > 0$ の範囲で, $x = \sqrt{\quad}$ のとき共有点をもつ。

5 [I. 2009 名古屋市立大 II. 2003 弘前大 III. 2012 法政大]

I. x についての方程式 $(\log_2 x)^3 - 6\log_{\sqrt{2}} x + k = 0$ が異なる2つの解をもつとき, k の値と解を求めよ。

II. 方程式 $2^{3x+1} - a \times 2^x + a = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ。ただし, a は定数とする。

III. $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \geq -1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。
- (2) (1) で求めた範囲の θ について, $4\cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta$ の最大値と最小値を求めよ。
また, そのときの θ の値を求めよ。
- (3) k は実数の定数とする。 $4\cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta = k$ かつ $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \geq -1$ を満たす θ が, ちょうど3個存在するような, k の値の範囲を求めよ。

高2数学 基本問題演習 演習 31. 微分法(3)

6 [I . 2008 愛知教育大 II . 2008 九州大 III . 2005 鹿児島大]

I . 関数 $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ のグラフについて、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $(0, -4)$ からこのグラフに引いた接線の方程式と接点の座標をすべて求めよ。
- (2) 点 $(0, k)$ からこのグラフに3本の接線が引けるとき、実数 k の範囲を求めよ。

II . 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 P における法線とは、点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。

- (1) 点 (p, p^2) における C の法線の方程式を求めよ。
- (2) y 軸上の点 $(0, a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。

III . $f(x) = x^3 - x$ とし、関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。

- (1) C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ。
- (2) $t \neq t'$ のとき、点 $(t, f(t))$ における C の接線と点 $(t', f(t'))$ における C の接線は異なることを示せ。
- (3) C の接線で点 $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ を通るものの方程式をすべて求めよ。
- (4) 点 (u, v) を通る C の接線が3本存在するための u, v の満たすべき条件を求めよ。
また、その条件を満たす点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

7 [(1) 2017 東京都市大 (2) 1997 学習院大]

- (1) すべての実数 x に対して、不等式 $\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4} \geq x$ が成り立つことを示せ。
- (2) a を正の定数とする。このとき、すべての $x \geq 0$ と自然数 n に対して不等式 $x^n - a^n \geq na^{n-1}(x - a)$ が成り立つことを示せ。

8 [(1) 高崎経済大 (2) 熊本県立大 (3) 大阪大 (4) 明治大]

- (1) 不等式 $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + k > 0$ がすべての実数 x について成り立つような定数 k の範囲を求めよ。
- (2) $x \geq 0$ のすべての x について、不等式 $a(x-1) \leq x^3$ を満たす a の最大値を求めよ。
- (3) a を実数とし、関数 $f(x) = x^3 - 3ax + a$ を考える。 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x) \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。
- (4) $c > 0$ を正の実数とするとき、すべての $x > 0$ に対して、 $x^3 - cx > \sqrt{c}x^2 - 8$ となる c の範囲を求めよ。