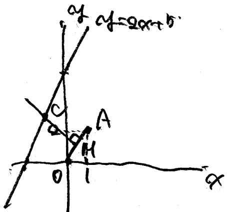
基本問題演習 26. 図形と方程式(2)

[1]



(1) OAの中点をM$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$とし

求める円の中心をCとすると

CはCM: $y-1=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

と $y=2x+5$ の交点より

$2x+5=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ として

$\frac{5}{2}x=-\frac{15}{4}$ $\therefore x=-\frac{3}{2}$ $\therefore$ C$\boxed{\left(-\frac{3}{2}, 2\right)}$

半径は $OC=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\boxed{\frac{5}{2}}$

(2) △ABCの外接円は

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおける

A(3, 1)を通るから $3a+b+c=-10$ — ①

B(−3, 5) 〃 $-3a+5b+c=-34$ — ②

C(−1, −1) 〃 $-a-b+c=-2$ — ③

①〜③より

$a=\frac{4}{7},\ b=-\frac{36}{7},\ c=-\frac{46}{7}$

よって

$x^2+y^2+\frac{4}{7}x-\frac{36}{7}y-\frac{46}{7}=0$

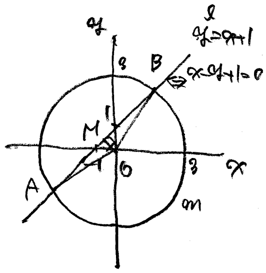
$\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{18}{7}\right)^2=\frac{5^2\cdot 26}{7^2}$

よって 中心$\left(-\frac{2}{7}, \frac{18}{7}\right)$, 半径 $\frac{5\sqrt{26}}{7}$ //

<point>

1. 円の方程式

[2]



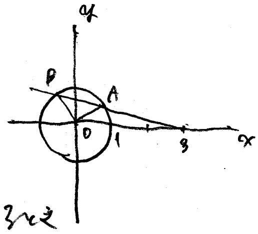
I. (1) $OM=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ //

(2) $AB=2AM$

$=2\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=2\sqrt{\frac{17}{2}}=\sqrt{34}$ //

II.



直線lは

$y=m(x-3)$

$\therefore mx-y-3m=0$

これが円Cと異なる2点A, Bで交わるとき

$\frac{|-3m|}{\sqrt{m^2+1}}<1$

$|3m|<\sqrt{m^2+1}$

$9m^2<m^2+1$

$m^2<\frac{1}{8}$ $\therefore \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}<m<\frac{\sqrt{2}}{4}}$

△OABの面積が$\frac{1}{2}$となるとき

∠AOB$=\theta$とすると

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=90°$

このとき

$\frac{|-3m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$18m^2=m^2+1$

$17m^2=1$ $\therefore m=\boxed{\pm\frac{\sqrt{17}}{17}}$

<point>

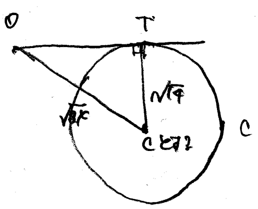
1. 円と直線の位置関係

[3]

C: $x^2+y^2-10x+6y+20=0$

$(x-5)^2+(y+3)^2=14$

中心C(5, −3), 半径は $\boxed{\sqrt{14}}$



$OC=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

$OT=\sqrt{OC^2-OT^2}=\sqrt{20}=\boxed{2\sqrt{5}}$

□4

(1) $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$

$\therefore x+\sqrt{3}y=2$ //

(2) BからCに引いた接線はy軸に平行でないから傾きをmとすると

$y+\frac{\sqrt{5}}{5}=m\left(x-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ とおける

$5mx-5y-3\sqrt{5}m-\sqrt{5}=0$

これが $x^2+y^2=1$ に接するから

$\frac{|-3\sqrt{5}m-\sqrt{5}|}{5\sqrt{m^2+1}}=1$

$|-3\sqrt{5}m+\sqrt{5}|=5\sqrt{m^2+1}$

$(3m-1)^2=5(m^2+1)$

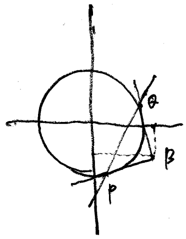
$4m^2-6m-4=0$ $\frac{1}{2}\times$

$2m^2-3m-2=0$

$(m-2)(2m+1)=0$ $\therefore m=2,-\frac{1}{2}$ //

(3) $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ とすると

P, Qにおける接線は



$x_1x+y_1y=1$

$x_2x+y_2y=1$

これらがBを通るから

$\frac{3\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}y_1=1$

$\frac{3\sqrt{5}}{5}x_2-\frac{\sqrt{5}}{5}y_2=1$

これらの式は $\frac{3\sqrt{5}}{5}x-\frac{\sqrt{5}}{5}y=1$ が P, Qを通ることを表わし、2点P, Qを通る直線はこれしかないので

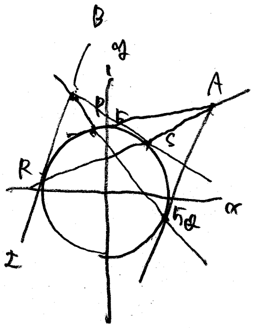
$\frac{3\sqrt{5}}{5}x-\frac{\sqrt{5}}{5}y=1$ //

<point>

1、1本の接線

2、まとめ接線

□5



(1) $8x+6y=25$ //

(2) $B(a,b)$ とすると

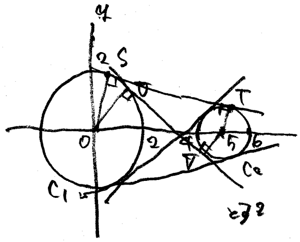
RS: $ax+by=25$

また $B(a,b)$ は $8x+6y=25$ 上の点より

$8a+6b=25$

これはRSが $A(8,6)$ を通ることを表わしている □

□6



(1) 4本

(2) 接点を (x_1,y_1) $(x_1,y_1>0)$ として、接線は

$x_1x+y_1y=4$

これが C_2 にも接するとき

$\frac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=1$, $x_1^2+y_1^2=4$

$|5x_1-4|=2$

$5x_1-4=\pm2$ $\therefore x_1=\frac{6}{5},\frac{2}{5}$

図より

$\frac{2}{5}x+\frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{6}}{5}y=\cancel{4}^{2}$

$\therefore x+2\sqrt{6}y=10$ //

(3) $ST=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$ [illegible]

$UV=\sqrt{5^2-3^2}=4$ [illegible] //

<point>

1、共通接線

□7

I. $x^2+y^2=1$

$x^2+y^2-4x-4y+8-a=0$

$(x-2)^2+(y-2)^2=a$ 中心間の距離は $2\sqrt{2}$

これらが共有点をもつとき

$|\sqrt{a}-1|\underset{①}{\leqq}2\sqrt{2}\underset{②}{\leqq}\sqrt{a}+1$

① $\sqrt{a}\leqq1+2\sqrt{2}$ $\therefore a\leqq9+4\sqrt{2}$

② $\sqrt{a}\geqq2\sqrt{2}-1$ $\therefore a\geqq9-4\sqrt{2}$

よって

$9-4\sqrt{2}\leqq a\leqq9+4\sqrt{2}$ //

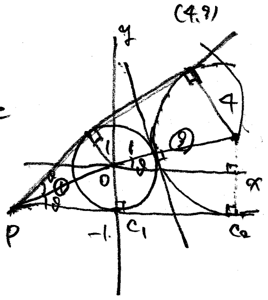
Ⅱ.

(1) C_2の中心を$(4, h)$とおくと
半径は$h+1$より

$(h+2)^2 = h^2 + 4^2$

$4h + 4 = 16$

$\therefore h = 3$



よってC_2の方程式は

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$ //

(2) 図のPは $P\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{24}{7}$

よって求める直線は

$y = -1$

$y + 1 = \frac{24}{7}\left(x + \frac{4}{3}\right)$ $\therefore y = \frac{24}{7}x + \frac{25}{7}$ //

$y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right)$ $\therefore y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ //

<point>
1. 2円の位置関係

$\boxed{8}$

Ⅰ. (1) $C_1: x^2 + y^2 = 3$ 半径$\sqrt{3}$

$C_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 半径3

中心間の距離は $d = \sqrt{10}$

$3 - \sqrt{3} < \sqrt{10} < 3 + \sqrt{3}$

よってC_1とC_2は2点で交わる

2つの交点を通る直線は

$2x + 6y - 4 = 0$

$\therefore x + 3y - 2 = 0$ //

(2) $k(x^2+y^2-3) + x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ は
C_1とC_2の2つの交点を通る曲線を表す

これが原点を通るとき

$1 - 3k = 0$ $\therefore k = \frac{1}{3}$

よって

$\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}y^2 - 2x - 6y = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}y = 0$ //

(3) $(k+1)x^2 + (k+1)y^2 - 2x - 6y - 3k + 1 = 0$ $(k \neq -1)$

$x^2 + y^2 - \frac{2}{k+1}x - \frac{6}{k+1}y - \frac{3k-1}{k+1} = 0$

$(3k-1)(k+1) + 10$

$\left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{k+1}\right)^2 - \frac{10}{(k+1)^2} - \frac{3k-1}{k+1} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{1}{k+1}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{k+1}\right)^2 = \frac{3k^2+2k+9}{(k+1)^2}$

これがx軸に接するとき

$\frac{9}{(k+1)^2} = \frac{3k^2+2k+9}{(k+1)^2}$

$3k^2 + 2k = 0$

$k(3k+2) = 0$ $\therefore k = 0, -\frac{2}{3}$

よって

$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 6x - 18y + 9 = 0$ //

Ⅱ. $y - 2x^2 + 3x - 1 + k(y + x^2 + x - 2)$ は
2放物線の2つの交点を通る曲線を表す

これが直線を表すとき $k = 2$より

$3y - x - 3 = 0$ $\therefore y = \frac{1}{3}x + 1$ //

<point>
1. 曲線束

$\boxed{9}$

$l: (x - 2y + 3) + k(x - y - 1) = 0$

これが任意のkについて成り立つとき

$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ $\therefore (x, y) = (4, 3)$

よってlは定点$\boxed{(4, 3)}$を通る

PQ: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ とlが
交わるとき

$(2x - 4) + k\left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}\right) = 0$

$(4 + 3k)x = 9k + 8$

$\therefore x = \frac{9k+8}{3k+4}$ $\left(k \neq -\frac{4}{3}\right)$

が$1 \leqq x \leqq 5$に解をもてばよいから

$1 \leqq \frac{9k+8}{3k+4} \leqq 5$

$1 \leqq 3 - \frac{4}{3k+4} \leqq 5$

$-2 \leqq -\frac{4}{3k+4} \leqq 2$

$-1 \leqq \frac{2}{3k+4} \leqq 1$

$\boxed{k < -2,\ k > \frac{2}{3}}$ //

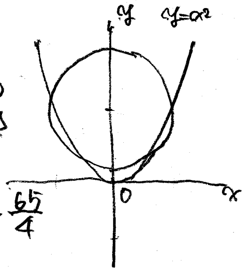
$l: (x-2y+3)+k(x-y-1)=0$ は
$x-y-1=0$, $x-2y+3=0$ を表すことはできない
PQ: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ と $x-y-1=0$ が交わるとして

$$\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0 \qquad \therefore x=3 \qquad \therefore (3,2)$$

よって求める点は $\boxed{(3,2)}$

$\boxed{10}$

I. $x^2+(y-a)^2=16$, $y\geq 0$ として



$$y^2+(1-2a)y+a^2-16=0 \quad \text{—①}$$

判別式を D として D=0 のとき

$$D=(1-2a)^2-4(a^2-16)$$
$$=-4a+65=0 \qquad \therefore a=\frac{65}{4}$$

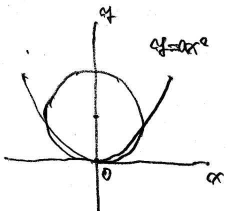
$y=0$ のとき 1つの共有点
$y>0$ 〃 2 〃 が対応するから

共有点の個数は

$a<-4$ のとき 0個
$a=-4$ 〃 1個
$-4<a<4$ のとき 2個
$a=4$ 〃 3個
$4<a<\frac{65}{4}$ 4個
$a=\frac{65}{4}$ 〃 2個
$a>\frac{65}{4}$ 〃 0個

(①の2解を α, β
$\begin{cases} \alpha+\beta>0 \\ \alpha\beta>0 \end{cases}$ ともに正
$\alpha\beta<0$ 一方が正 他方が負

II (1) y を消去して



$$\frac{y}{a}+(y-1)^2=r^2, \quad y\geq 0$$
$$y^2-\left(2-\frac{1}{a}\right)y+1-r^2=0 \quad \text{—①}$$

$y=0$ のとき 1つの共有点
$y>0$ 〃 2 〃 が対応するから
①が $y=0$ と $y\leq 0$ となる解をもてばよい
①が $y=0$ を解にもつとき $r=\boxed{1}$
このとき

$$y\left\{y-\left(2-\frac{1}{a}\right)\right\}=0$$
$$\therefore y=0,\ 2-\frac{1}{a}$$

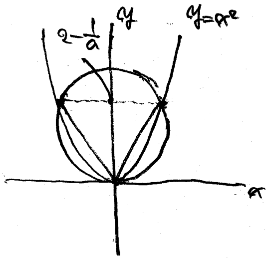
より

$$2-\frac{1}{a}\leq 0$$
$$2a^2-a\leq 0$$
$$a(2a-1)\leq 0 \qquad \therefore \boxed{0}<a\leq\boxed{\frac{1}{2}}$$

(2) $r=\boxed{1}$ かつ

$$2-\frac{1}{a}>0$$
$$2a^2-a>0$$
$$a(2a-1)>0$$

$a>0$ より $a>\boxed{\frac{1}{2}}$



(3) $y=2-\frac{1}{a}$ のとき

$$2-\frac{1}{a}=x^2$$
$$\therefore x=\pm\sqrt{2-\frac{1}{a}}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2-\frac{1}{a}}\cdot\left(2-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\boxed{\left(2-\frac{1}{a}\right)\sqrt{2-\frac{1}{a}}}$$

<point>

1. 放物線と円