基本問題演習 32. 積分法(1)

[1]

(1) $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x^2-2x+3)dx$

$=2x^3-x^2+3x+C$ (C:積分定数)

$f(1)=7$より

$4+C=7$　　$\therefore C=3$

よって

$f(x)=2x^3-x^2+3x+3$

(2) (B)より

$f(x)+g(x)=x^2+3x+4$ …①

$x=0$を代入して

$f(0)+g(0)=4$　　$\therefore g(0)=1$

(C)より

$f(x)g(x)=x^3+3x^2+5x+C'$ (C'は積分定数)

$x=0$を代入して

$f(0)g(0)=C'$　　$\therefore C'=3$

よって

$f(x)g(x)=x^3+3x^2+5x+3$

$=(x+1)(x^2+2x+3)$ …②

①, ②かつ $f(0)=3$, $g(0)=1$より

$f(x)=x^2+2x+3$, $g(x)=x+1$

<point>

1. 不定積分

[2]

(1) $\int_{-2}^{0}(x^3+3x^2)dx-\int_{2}^{0}(x^3+3x^2)dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3+3x^2)dx+\int_{0}^{2}(x^3+3x^2)dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2)dx$

$=6\int_0^2 x^2dx$

$=6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=16$

(2) $\int_0^1(2x+1)^3dx$

$=\left[\frac{(2x+1)^4}{4\cdot 2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{8}(3^4-1^4)=10$

(3) $\int_{-2}^{2}(x^3+x^2+x+|x|)dx$

$=2\int_0^2(x^2+|x|)dx$

$=2\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+2\right\}=\frac{28}{3}$

<point>

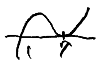
1. 定積分の性質

[3]

(1) $\int_1^7(7-x)(x-1)dx=-\int_1^7(x-1)(x-7)dx$

$=\frac{1}{6}(7-1)^3=36$

(2) $\int_1^7(7-x)^2(x-1)dx=\int_1^7(x-1)(x-7)^2dx$



$=\frac{1}{12}(7-1)^4=108$

(3) $\int_1^7 x(7-x)(x-1)dx$

$=-\int_1^7\{(x-7)+7\}(x-7)(x-1)dx$

$=-\int_1^7(7-x)^2(x-1)dx+7\int_1^7(7-x)(x-1)dx$

$=-108+7\cdot 36=144$

(4) $\int_1^3(x-1)^2(x-3)^2dx=\frac{1}{30}(3-1)^5=\frac{16}{15}$

<point>

1. $\frac{1}{6}$公式

① $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

② $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

③ $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

④ $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$

[4]

(1) $\int_{-1}^1(ax^2+bx+c)dx=2\int_0^1(ax^2+c)dx$

$=2\left[a\cdot\frac{x^3}{3}+cx\right]_0^1=-2$

$\therefore a+3c=-3$ …①

$$\int_{-1}^{1} x(ax^2+bx+c)\,dx = 2\int_0^1 bx^2\,dx$$
$$= 2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1 = 4$$
$$\therefore b = 6 \text{ ―①}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2(ax^2+bx+c)\,dx = 2\int_0^1 (ax^4+cx^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^1 = 2$$
$$\therefore 3a+5c = 15 \text{ ―②}$$

①〜② より

$c=-6,\ a=15$

よって

$a=15,\ b=6,\ c=-6$ //

(3) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 dx$

$= \int_{-1}^{1}(15x^2+6x-6)f(x)\,dx$

$= 15\int_{-1}^{1}x^2 f(x)\,dx + 6\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx - 6\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

$= 15\cdot 2 + 6\cdot 4 - 6\cdot(-2) = 66$ //

$\boxed{5}$

(1) $f(x) = 2x + \int_0^2 f(t)\,dt$

$A=\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと $f(x)=2x+A$

$A = \int_0^2 (2t+A)\,dt$

$= [t^2+At]_0^2$

$= 4+2A \quad \therefore A=-4$

よって

$f(x)=2x-4$ //

(2) $f(x)=\int_{-1}^{1}(x-t)f(t)\,dt+7$

$= x\int_{-1}^{1}f(t)\,dt - \int_{-1}^{1}tf(t)\,dt + 7$

$A=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt,\ B=\int_{-1}^{1}tf(t)\,dt$ とおくと $f(x)=Ax-B+7$

$A=\int_{-1}^{1}(At-B+7)\,dt$

$=2\int_0^1(-B+7)\,dt = 2[(-B+7)t]_0^1 = -2B+14$

$\therefore A+2B=14$ ―①

$B=\int_{-1}^{1}\{At^2+(7-B)t\}\,dt$

$=2\int_0^1 At^2\,dt = 2\left[\frac{A}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}A$

$\therefore B=\frac{2}{3}A$ ―②

①,② より $A=6,\ B=4$

よって $f(x)=6x+3$ //

(3) $f(x)=x^2+\int_1^2(3x-t)f(t)\,dt$

$= x^2+3x\int_1^2 f(t)\,dt - \int_1^2 tf(t)\,dt$

$A=\int_1^2 f(t)\,dt,\ B=\int_1^2 tf(t)$ とおくと $f(x)=x^2+3Ax-B$

$f'(x)=2x+3A$

$A=\int_1^2(2t+3A)\,dt$

$=[t^2+3At]_1^2 = 3+3A \quad \therefore A=-\frac{3}{2}$

$B=\int_1^2(2t^2+3At)\,dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}At^2\right]_1^2 = \frac{14}{3}+\frac{9}{2}A \quad \therefore B=-\frac{25}{12}$

よって

$f(x)=x^2-\frac{9}{2}x+\frac{25}{12}$ //

(4) $f(x)=2x+\int_0^1 f(t)\,dt$

$A=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと $f'(x)=2x+A$

$f(x)=x^2+Ax+C$

$f(0)=-\frac{1}{3}$ より $C=-\frac{1}{3}$

$A=\int_0^1\left(t^2+At-\frac{1}{3}\right)dt$

$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{A}{2}t^2-\frac{1}{3}t\right]_0^1 = \frac{A}{2} \quad \therefore A=0$

よって

$f(x)=x^2-\frac{1}{3}$ //

(5) $f(x)=-3x\int_1^2 g(t)\,dt-5,\ g(x)=-3x^2-x\int_0^1 f(t)\,dt$

$A=\int_1^2 g(t)\,dt,\ B=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと

$f(x)=-3Ax^2-5,\ g(x)=-3x^2-Bx$

$A=\int_1^2(-3t^2-Bt)\,dt=\left[-t^3-\frac{B}{2}t^2\right]_1^2=-7-\frac{3}{2}B$ ―①

$B=\int_0^1(-3At^2-5)\,dt=[-At^3-5t]_0^1=-A-5$ ―②

①,② より

$A=-1,\ B=-4$

よって

$f(x)=3x^2-5,\ g(x)=-3x^2+4x$ //

<point>

1. 積分方程式（区間定数型）

6

(1) $\int_a^x f(t)\,dt = x^3+x-2$ —①

両辺xで微分して

$f(x)=3x^2+1$ //

①に$x=a$を代入して

$0=a^3+a-2$

$(a-1)(a^2+a+2)=0$

aは実数より $a=1$ //

1	1	0	1	−2
		1	1	2
	1	1	2	0

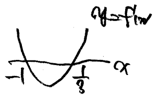
(2) $f(x)=\int_0^x (3t^2+2t-1)\,dt$

$f'(x)=3x^2+2x-1$

$=(x+1)(3x-1)$

$f'(x)=0$として $x=-1,\ \frac{1}{3}$

x		-1		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=\frac{1}{3}$で極小

極小値 $f(\frac{1}{3})=\int_0^{\frac{1}{3}}(3t^2+2t-1)\,dt$

$=\left[t^3+t^2-t\right]_0^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\boxed{-\frac{5}{27}}$ //

<point>

1. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

7

I. $f(x)=-2x^2+2\int_1^x f'(t)\,dt$ —①

両辺xで微分して

$f'(x)=-4x+2f'(x)$

$\therefore f'(x)=4x$

$f(x)=2x^2+C$

①に$x=1$を代入して $f(1)=-2$ より

$2+C=-2 \quad \therefore C=-4$

よって

$f(x)=2x^2-4$ //

II. $f(x)=x^3-x\int_0^1 f(t)\,dt+5\int_1^x f'(t)\,dt$

$A=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと —①

$f(x)=x^3-Ax+5\int_1^x f'(t)\,dt$ —②

両辺xで微分して

$f'(x)=3x^2-A+5f'(x)$

$\therefore f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{A}{4}$

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{A}{4}x+C$

②に$x=1$を代入して $f(1)=1-A$ より

$-\frac{1}{4}+\frac{A}{4}+C=1-A \quad \therefore C=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}A$ —③

①より

$A=\int_0^1\left(-\frac{1}{4}t^3+\frac{A}{4}t+C\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{16}t^4+\frac{A}{8}t^2+Ct\right]_0^1$

$=-\frac{1}{16}+\frac{A}{8}+C$ —④

③, ④より

$A=\frac{19}{34},\ C=\frac{75}{132}$

よって

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{19}{132}x+\frac{75}{132}$ //

III. (1) $f(x)$をn次式とおくと

左辺は$n+1$次式、右辺は2次式より

$n+1=2 \quad \therefore n=1$

よって1次式 //

(2) $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$とおける

このとき

左辺$=ax+\int_1^x (at+b)\,dt$

$=ax+\left[\frac{a}{2}t^2+bt\right]_1^x$

$=\frac{a}{2}x^2+(a+b)x-\frac{a}{2}-b$

与式がすべてのxで成りたつとき

$$\begin{cases}\frac{a}{2}=2 & \text{—①}\\ a+b=1 & \text{—②}\\ -\frac{a}{2}-b=1 & \text{—③}\end{cases}$$

①, ②より $a=4,\ b=-3$

これは③も満たす

よって

$f(x)=4x-3$ //

<point>

1. 積分方程式(定積分型)

[8]

I. (1) $A=\int_{-1}^{2}g(t)dt$ —② とおくと $f(x)=x-A$

$g(x)=3+2\int_{0}^{x}f(t)dt$ —①

両辺を x で微分して

$g'(x)=2f(x)=2x-2A$

$g(x)=x^2-2Ax+C$

①に $x=0$ を代入して $g(0)=3$ より

$C=3$

②より

$A=\int_{-1}^{2}(t^2-2At+3)dt$

$=\left[\frac{t^3}{3}-At^2+3t\right]_{-1}^{2}$

$=3-3A+9$ $\therefore A=3$

よって

$f(x)=x-3$, $g(x)=x^2-6x+3$ //

(2) 略.

II. $A=\int_{0}^{1}f(t)dt$ —④ とおくと

$g(x)=x^2-2Ax+1$

①の両辺を x で微分して

$f(x)=g(x)+xg'(x)+a$ —③

また①に $x=1$ を代入して

$0=g(1)+a+2$ $\therefore g(1)=-a-2$

$g(1)=-a-2$ より

$2-2A=-a-2$

$\therefore A=\frac{a}{2}+2$

③より

$f(x)=x^2-2(\frac{a}{2}+2)x+1+x\{2x-(a+4)\}+a$

$=3x^2-2(a+4)x+a+1$

④より

$\frac{a}{2}+2=\int_{0}^{1}(3t^2-2(a+4)t+a+1)dt$

$=\left[t^3-(a+4)t^2+(a+1)t\right]_{0}^{1}$

$=-2$

$\therefore a=-8$

$f(x)=3x^2+8x-7$ $g(x)=x^2+4x+1$ //