基本問題演習16. 指数・対数関数

[1]

与式 $=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}$　　$125000=5^3\cdot 10^3$

$=a^{\frac{8+3+1-6-4}{12}}$

$=a^{\frac{1}{6}}$

$=(50^3)^{\frac{1}{6}}$

$=\sqrt{50}=\boxed{5}\sqrt{2}$

<point>

1. 指数法則
2. 累乗根

[2]

(1) $a^6=(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8$

$b^6=(3^{\frac{1}{3}})^6=3^2=9$

$a, b>0$ より $a<b$

$a^{10}=(2^{\frac{1}{2}})^{10}=2^5=32$

$c^{10}=(5^{\frac{1}{5}})^{10}=5^2=25$

$a, c>0$ より $c<a$

よって

$c<a<b$ //

(2) $2^x=3^y=5^z$ より

$(2^{\frac{1}{2}})^{2x}=(3^{\frac{1}{3}})^{3y}=(5^{\frac{1}{5}})^{5z}$

(1)から $5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$ より

$3y<2x<5z$ //

[3]

I. (1) $4^x-2^{x+2}+3a+2=0$

$t=2^x$ とおくと $t>0$

$t^2-4t+3a+2=0$

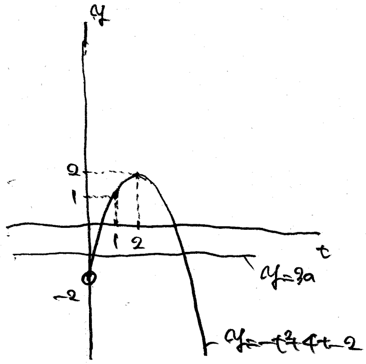
$-t^2+4t-2=3a$ を満たす t は

$y=-t^2+4t-2$ と $y=3a$ の共有点の t 座標に等しい

$=-(t-2)^2+2$

また $t=2^x$ より

1つの t に対して1つの x が対応するから



グラフより

$-2<3a<2$

$\therefore -\dfrac{2}{3}<a<\dfrac{2}{3}$ //

(2) 2つの異なる正の解をもつとき

$t=2^x$ より $t>1$ となる2つの t があればよいから

グラフより

$1<3a<2$

$\therefore \dfrac{1}{3}<a<\dfrac{2}{3}$ //

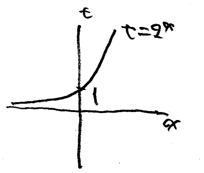
(3) 正の解と負の解をもつとき

$t=2^x$ より $t<1$, $t>1$ となる t が1つずつあればよいから

グラフより

$-2<3a<1$

$\therefore -\dfrac{2}{3}<a<\dfrac{1}{3}$ //



II. $4^x-a^2 2^x+2a^2+4a-6=0$ …①

$t=2^x$ とおくと $t>0$

$t^2-a^2t+2a^2+4a-6=0$ …②

$t=2^x$ より 1つの t に対して1つの x が対応するから

①が正の解と負の解を1つずつもつとき

②が $0<t<1$ に1つ, $t>1$ に1つずつ解をもてばよいから

$f(t)=t^2-a^2t+2a^2+4a-6$ とおいて

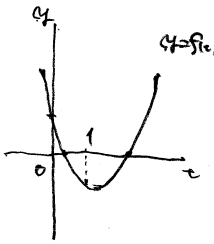
$\begin{cases} f(1)<0 : a^2+4a-5<0 \\ f(0)>0 : a^2+2a-3>0 \end{cases}$

$(a+5)(a-1)<0$

$\therefore -5<a<1$ …③

$(a+3)(a-1)>0$

$\therefore a<-3,\ a>1$ …④



③, ④ より

$-5<a<-3$ //

[4]

(1) $t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ （相加相乗）

等号成立は $2^x=2^{-x}$　$2^x=1$　∴ $x=0$ のとき

このとき最小値をとり 最小値は 2 //

(2) $y=4^x+4^{-x}-6(2^x+2^{-x})$

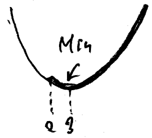
$=(2^x+2^{-x})^2-2-6(2^x+2^{-x})$

$=t^2-6t-2$ //

(3) $=(t-3)^2-11$

$t=3$ のとき 極小で

最小値 -11 //

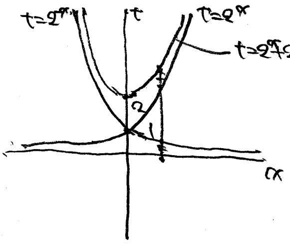


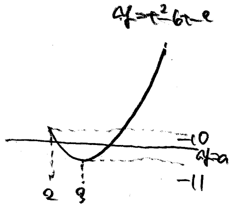
(4) $y=a$ を満たす x の個数は

$y=t^2-6t-2$ と $y=a$ の共有点の個数に等しい
$(t\geq 2)$

また

$t=2^x+2^{-x}$ より





$t=2$ のとき $x=0$ （1個）

・$t>2$ のとき 1つの t に対し2つの x が対応するから

$y=a$ となるような x の個数は

$a<-11$ のとき	0個
$a=-11$ 〃	2個
$-11<a<-10$ 〃	4個
$a=-10$ 〃	3個
$a>-10$ 〃	2個 //

[5]

(1) $3^x=a$ より $x=\log_3 a$　　$2^x=3\Leftrightarrow x=\log_2 3$

$12^y=a$ より $y=\log_{12} a$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_a 3+\log_a 12$

$=\log_a 36=2$

$\Leftrightarrow a^2=36$

$a>0$ より $a=6$ //

【別解】

$3^x=a$ より $a^{\frac{1}{x}}=3$

$12^y=a$ 〃 $a^{\frac{1}{y}}=12$

$a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{x}}a^{\frac{1}{y}}$

$a^2=36$　　∴ $a=6$ //

(2) $a^x=b^y=c^z=k$ とおくと

$a=k^{\frac{1}{x}},\ b=k^{\frac{1}{y}},\ c=k^{\frac{1}{z}}$

$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=ab$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ より

$k^{\frac{1}{z}}=ab$

∴ $c=ab$ //

[別解]

$x=\log_a k,\ y=\log_b k,\ z=\log_c k$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_k a+\log_k b$

$=\log_k ab$

$\frac{1}{z}=\log_k c$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ より

$\log_k ab=\log_k c$

∴ $ab=c$ //

<point>

1. log の定義

[6]

I. $a<b<a^2,\ a>1$ より

$1<\underbrace{\log_a b}_{x}<2$

$\overset{y}{=}\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$　∴ $\frac{1}{2}<y<1$

$z=\log_a ab=1+\log_a b$　∴ $2<z<3$

$w=\log_b\frac{b}{a}=1-\log_b a$　∴ $0<w<\frac{1}{2}$

よって

$w<y<x<z$ //

II.

(1) $q-p=\log_{10}\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{\log_{10}a+\log_{10}b}{2}$

$=\log_{10}\dfrac{a+b}{2}-\log_{10}\sqrt{ab}$

相加相乗平均から $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ $(a\neq b)$ であり

底10(>1)より

>0

$\therefore p<q$

(2) $a=3,\ b=5$ とすると

$p=\log_{10}\sqrt{15},\ q=\log_{10}4,\ r=\log_{10}\sqrt{8}$

$\sqrt{8}<\sqrt{15}<4$ より

$r<p<q$

であることが必要

$p-r=\dfrac{\log_{10}a+\log_{10}b}{2}-\dfrac{\log_{10}(a+b)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\{\log_{10}ab-\log_{10}(a+b)\}$

ここで $a>2,\ b>2$ のとき

$ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1>0$

$\therefore ab>a+b$

底10(>1)より

$p-r>0$

$\therefore p>r$

よって

$r<p<q$ //

$\boxed{\text{V}}$

I. (1) $\log_a b=k$ とおくと $b=a^k$

両辺底が c の対数をとって

$\log_c b=\log_c a^k$

$\log_c b=k\log_c a$

$\therefore k=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\therefore \log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ //

(2) $\log_4(x+3)=\log_2 x-1$

真数>0より

$x+3>0,\ x>0$ $\quad\therefore x>0$

$\dfrac{\log_2(x+3)}{\underbrace{\log_2 4}_{2}}=\log_2\dfrac{x}{2}$

$\log_2(x+3)=2\log_2\dfrac{x}{2}$

$\log_2(x+3)=\log_2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

$x+3=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x>0$ より $x=6$ //

(3) $\log_4(x+k)=\log_2 x-1,\ x>-k,\ x>0$

$\log_2(x+k)=\log_2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2,\ x>-k,\ x>0$ が解をもてばよい

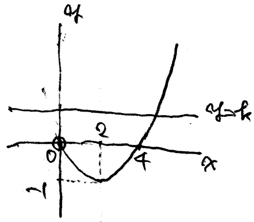
$x+k=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2,\ x>0$ …① ← $x>0$ であれば①から $x+k>0$ すなわち $x>-k$ であるから $x>-k$ は考えなくてよい

$\dfrac{x^2}{4}-x=k$ が $x>0$ で解をもてばよい …①'

①の解は $y=\dfrac{x^2}{4}-x$ と $y=k$ の共有点の x 座標に等しいから

グラフより

$k\geqq -1$ //



II (1) $\log_a(x+4)+\log_a(x-2)>\log_a(7x-2)$

真数>0より

$x+4>0,\ x-2>0,\ 7x-2>0$

$\therefore x>2$

$\log_a(x+4)(x-2)>\log_a(7x-2)$

i) $a>1$ のとき

$(x+4)(x-2)>7x-2$

$x^2-5x-6>0$

$(x+1)(x-6)>0$

$x>2$ より $x>6$ //

ii) $0<a<1$ のとき

$(x+1)(x-6)<0$

$x>2$ より $2<x<6$ //

$\boxed{8}$

(1) $\log_x y > 0$

$\log_x y > \log_x 1$

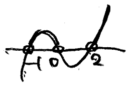
(i) $x>1$ のとき $y>1$

(ii) $0<x<1$ のとき $y<1$

(2) $\log_x y - 2\log_y x > 1$

$\log_x y - \frac{2}{\log_x y} - 1 > 0$　両辺×$(\log_x y)^2 \geqq 0$

$(\log_x y)^3 - (\log_x y)^2 - 2\log_x y > 0$



$\log_x y(\log_x y+1)(\log_x y-2) > 0$

$\therefore -1 < \log_x y < 0$ or $\log_x y > 2$

$\log_x \frac{1}{x}$　　$\log_x 1$　　$\log_x x^2$

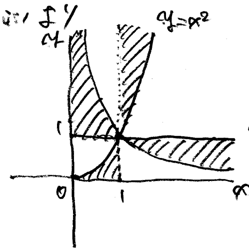
(i) $x>1$ のとき

$\frac{1}{x} < y < 1$ or $y > x^2$

(ii) $0<x<1$ のとき

$1 < y < \frac{1}{x}$, $y < x^2$

(i),(ii)より



求める領域は上の斜線部 ただし境界は除く。

$\boxed{9}$

(1) $\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 = \boxed{0.6020}$

$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = \boxed{0.6990}$

$\log_{10} 6 = \log_{10} 2\cdot 3 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \boxed{0.7781}$

(2) $\log_{10} 48 < \log_{10} 49 < \log_{10} 50$

$\log_{10} 48 = \log_{10} 2^4\cdot 3 = 4\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 1.6811$

$\log_{10} 50 = \log_{10} \frac{100}{2} = 2 - \log_{10} 2 = 1.6990$

$\log_{10} 49 = 2\log_{10} 7$ より

$0.84055 < \log_{10} 7 < 0.8495$

$\therefore \log_{10} 7 = \boxed{0.84}$

(3) $10^6 \leqq n^7 < 10^7$ となるとき

$6 \leqq 7\log_{10} n < 7$

$\therefore \underset{0.85\cdots}{\frac{6}{7}} \leqq \log_{10} n < 1$　　$\log_{10} 8 = 0.9030$

これを満たすnは $\boxed{8} \leqq n \leqq \boxed{9}$

(4) $\log_{10} 18^{50} = 50\log_{10} 18$ (2×3^2)

$= 50(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3)$

$= 50\times 1.2552$

$= 62.760$

$62 < \log_{10} 18^{50} < 63$

$\therefore 10^{62} < 18^{50} < 10^{63}$

よって18^{50}は$\boxed{63}$桁の整数であり

また

$62 + \log_{10} 5 < \log_{10} 18^{50} < 62 + \log_{10} 6$

$\therefore 5\cdot 10^{62} < 18^{50} < 6\cdot 10^{62}$

よって18^{50}の最高位の数字は$\boxed{5}$で、

18^nの一の位の数字は 8, 4, 2, 6, 8, … とくり返すから

$\boxed{4}$

<point>

1. 常用対数

$\boxed{10}$

I. (1) $10^{10} \leqq 3^n < 10^{11}$ となるとき

$10 \leqq \log_{10} 3^n < 11$

$10 \leqq 0.4771n < 11$

$\therefore 20.9\cdots \leqq n < 23.\cdots$

$\therefore n = 21, 22, 23$

(2) $\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{50} = 50(\log_{10} 2 - \log_{10} 3)$

$= -8.8050$

$-9 < \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{50} < -8$

$\therefore 10^{-9} < \left(\frac{2}{3}\right)^{50} < 10^{-8}$

よって小数第$\boxed{9}$位に初めて0でない数字が現れる

II. $5\times 10^{26} \leqq 3^n < 6\times 10^{26}$ となるとき

$\log_{10} 5\times 10^{26} \leqq \log_{10} 3^n < \log_{10} 6\times 10^{26}$

$26.6990 \leqq 0.4771n < 26.7781$

$\therefore 55.96\cdots \leqq n < 56.12\cdots$

$n = \boxed{56}$

III. $10^6 \leqq a^2b < 10^7$ より

$6 \leqq 2\log_{10}a + \log_{10}b < 7$ …①

$10^{-10} \leqq \frac{b^2}{c^8} < 10^{-9}$ より

$-10 \leqq 2\log_{10}b - 8\log_{10}c < -9$ …②

$2\times① + (-②)$ より

$21 \leqq 4\log_{10}a + 8\log_{10}c < 24$

$\frac{21}{4} \leqq \log_{10}a + 2\log_{10}c < 6$

∴ $10^5 < 10^{\frac{21}{4}} < ac^2 < 10^6$

より ac^2 は6桁

①+② より

$-4 \leqq 2\log_{10}a + 3\log_{10}b - 8\log_{10}c < -2$

$-2 \leqq \log_{10}a + \frac{3}{2}\log_{10}b - 4\log_{10}c < -1$

∴ $10^{-2} \leqq \frac{ab\sqrt{b}}{c^4} < 10^{-1}$

より $\frac{ab\sqrt{b}}{c^4}$ は小数第2位に初めて0でない数字が現れる

<point>

1. 桁数、最高位の数字

$\boxed{11}$

(1) $2^m = 3^n$ となる自然数 m, n が存在するとすると

左辺＝偶数、右辺＝奇数となり矛盾

よって題意は示された □

(2) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ (n, m は互いに素な自然数)と仮定すると

$2^{\frac{m}{n}} = 3$

$2^m = 3^n$

となる m, n が存在することとなり矛盾

よって題意は示された □