高2数学　基本問題演習　演習　34. 積分法(3)

$\boxed{1}$ [(1) 2009 東洋大　(2) 名古屋工業大　(3) 2016 福島大]

(1) 曲線 $y=x^2-4x-3$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+1$ とで囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) 関数 $y=x^2+1$ および $y=-x^2+2x+4$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ [(1) 2005 慶応義塾大　(2) 滋賀県立大]

(1) 2 次曲線 $y=-x(x-4)$ と直線 $y=ax$，$y=bx$ $(0<a<b<4)$ がある。この 2 直線により，2 次曲線と x 軸で囲まれる部分は 3 つの部分に分割される。この 3 つの部分の面積が等しいとき $(4-b)^3$，$(4-a)^3$ の値を求めよ。

(2) 2 つの放物線 C_1 : $y=3x^2-2x+1$, C_2 : $y=-x^2+x+2$ の両方の交点を通る第 3 の放物線を C_3 : $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c は定数) とおく. C_1 と C_3 で囲まれる領域の面積が C_2 と C_3 で囲まれる領域の面積と等しくなるような a, b, c の値を求めよ.

$\boxed{3}$ [Ⅰ. 2015 東京電機大　Ⅱ. 2009 早稲田大　Ⅲ. 2007 お茶の水女子大]

Ⅰ. 放物線 C : $y=2x^2$ と，点 $(1, 5)$ を通り傾きが m である直線 ℓ について，次の問いに答えよ。

(1)　C と ℓ が異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　定数 α，β に対し，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ を示せ。

(3)　C と ℓ で囲まれた部分の面積 S を m の式で表せ。

(4)　(3) の面積 S が最小となるとき，直線 ℓ の方程式を求めよ。

Ⅱ. 放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P，Q がある。PQ$=1$ であるとき，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積の最大値を求めよ。

Ⅲ. (1)　$\alpha<\beta$ を満たす実数 α，β に対して，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を示せ。

(2)　放物線 P を $y=-x^2+2x+4$ で定める。点 (p, q) が直線 $y=-2x+1$ の上を動くとき，$y=(x-p)^2+q$ で定める放物線 Q が P と共有点をもつような p の範囲を求めよ。

(3)　p が (2) で求めた範囲を動くとき，P と Q で囲まれた図形の面積の最大値を求めよ。

表題

$\boxed{4}$ [Ⅰ．1998 佐賀大　Ⅱ．2023 関西大]

Ⅰ．p を定数，q を正の定数とし，直線 $y=px+q$ …… ① と放物線 $y=x^2$ …… ② の 2 交点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とする．

(1)　直線 ① と放物線 ② で囲まれた部分の面積 S_1 は $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ．

(2)　放物線 ② と，点 A, B における放物線 ② の接線とで囲まれた部分の面積 S_2 を α，β を用いて表し，比 $S_1:S_2$ を求めよ．

Ⅱ．xy 平面内の曲線 C_1：$y=x^2$ に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から 2 本の接線を引き，接点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ とする。ただし，$q<p^2$，$\alpha<\beta$ とする。

(1)　p と q を α，β を用いて表せ。

(2)　線分 AB と C_1 とで囲まれた部分の面積を S とするとき，S を p，q を用いて表せ。

(3)　点 P が曲線 C_2：$y=-x^2+2x-2$ 上をくまなく動くとき，(2) で求めた S の最小値とそのときの p の値を求めよ。

$\boxed{5}$ [2001 高知大]

円 $x^2+y^2=3$ と放物線 $y=x^2+a$ が 2 点で交わり，それぞれの交点における放物線の接線がともに原点を通るとき，次の問いに答えよ．ただし，a は正の定数である．

(1)　定数 a の値および接線の方程式を求めよ．

(2)　円と放物線とで囲まれる部分のうち上側の面積を求めよ．

$\boxed{6}$ [Ⅰ．2007 同志社女子大　Ⅱ．2009 慶応義塾大　Ⅲ．2021 学習院大]

Ⅰ．放物線 C：$y=-x^2+x$ と，C 上の点 $(-1,\ -2)$ における接線および直線 $x=3$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

Ⅱ．放物線 $y=x^2+x+2$ を F_1 とし，放物線 $y=x^2-7x+10$ を F_2 とする。また 2 つの放物線 F_1，F_2 の両方に接する直線を ℓ とする。このとき，直線 ℓ の方程式は

$y=$ ア $\boxed{}$ であり，放物線 F_1，F_2 と直線 ℓ で囲まれる部分の面積は イ $\boxed{}$ である。

Ⅲ．2 つの放物線 C_1：$y=x^2+x$，C_2：$y=4x^2+5x$ の両方に接していて，傾きが正である直線を L とする。

(1)　L の方程式を求めよ。

(2)　L と C_1 の接点の x 座標を求めよ。

(3)　L と C_2 の接点の x 座標を求めよ。

(4)　L と C_1，C_2 とで囲まれた領域の面積を求めよ。

$\boxed{7}$ [Ⅰ．2010 津田塾大　Ⅱ．2001 東京商船大]

Ⅰ．連立不等式 $\begin{cases} \log_2 y \geqq \log_2 x - 1 \\ \log_2 y \leqq -2\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2(3-x) \end{cases}$ の表す領域を図示し，その面積を求めよ。

Ⅱ．2 つの曲線 C_1：$y=x(x^2-1)$ と C_2：$y=kx(x-\sqrt{2})$ $(k \geqq 2)$ がある．原点以外の共有点において，この 2 曲線の接線が一致しているとき

(1)　定数 k の値を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．ただし，$\displaystyle\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ (C は積分定数) を用いてよい．

$\boxed{8}$ [2019 大阪工業大]

関数 $f(x)=x^2(x-1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を微分せよ。

(2)　$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3)　$y=f(x)$ のグラフを x 軸の正の方向に 1，y 軸の正の方向に 2 だけ平行移動してできる曲線の方程式を $y=g(x)$ とするとき，$g(x)$ を求めよ。

(4)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{9}$ [2008 山形大]

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2$ として，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフをかけ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ に 2 点で接する直線の方程式を $y=g(x)=ax+b$ とする。その接点の x 座標を x_1，x_2 (ただし $x_1<x_2$) とするとき，4 次方程式 $f(x)-g(x)=0$ が $(x-x_1)^2(x-x_2)^2=0$ と表せることを使ってこの直線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と (2) で求めた直線 $y=g(x)$ とで囲まれる部分の面積を S とする。S の値を求めよ。必要に応じて $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$ を使ってよい。

$\boxed{10}$ [Ⅰ. 2013 首都大学東京　Ⅱ. 2015 東京電機大]

Ⅰ. 関数 $f(x)=|x^2-3x|-x$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 直線 ℓ：$y=-x+k$ と $y=f(x)$ のグラフがちょうど 3 点を共有するとき，定数 k の値を求めよ。

(3) (2) で求めた k の値に対する直線 ℓ と $y=f(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

Ⅱ. 曲線 C：$y=|x^2-4|$ と直線 ℓ：$y=2x+4$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。