

高2数学 基本問題演習 28. 軌跡と領域(2)

1 [I. 2010 甲南大 II. 2009 東北学院大]

I. a を定数, r を正の定数とし, 次の3つの不等式 ①, ②, ③ を考える。

$$2x - y - a \geq 0 \cdots \cdots \text{①}, \quad x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \cdots \cdots \text{②},$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 - r^2 \leq 0 \cdots \cdots \text{③}$$

座標平面上において, 不等式 ① を満たす領域を A , 不等式 ② を満たす領域を B , 不等式 ③ を満たす領域を C とする。

- (1) $a=1$ のとき, 領域 A と領域 B の共通部分を図示せよ。
- (2) 領域 A が領域 B を含むための a の条件を求めよ。
- (3) 領域 C が領域 B に含まれるときの r の最大値を求めよ。
- (4) r が前問(3)で求めた値のとき, 領域 A と領域 C が共通部分をもたないための a の条件を求めよ。

II. 不等式 $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 4x) \leq 0$ の表す領域を D とする。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 点 P が領域 D を動くとき, 点 P と点 $A(1, 1)$ の距離の最大値と最小値を求めよ。

2 [(1) 2004 津田塾大 (2) 2017 東京都市大]

- (1) 不等式 $|x| + |y+1| \leq 2$ の表す領域を図示せよ。
- (2) 不等式 $x^2 - 2\sqrt{2}|x| + y^2 \leq 2$ の表す領域の面積を求めよ。

3 [2016 島根大]

- (1) 2次方程式 $t^2 + 5t + 2 = 0$ の解を α, β とするとき, $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。
- (2) u, v を実数とする。2次方程式 $t^2 - ut + v = 0$ が実数解をもつとき, 点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。
- (3) 平面上の点 (a, b) が原点を中心とする半径1の円の内部を動くとき, 点 $(a+b, ab)$ の動いてできる領域を図示せよ。

高2数学 基本問題演習 28. 軌跡と領域(2)

4 [I. 2019 三重大 II. 東北大]

I. a を実数とし、直線 $y=2ax-a^2$ を l_a とする。

- (1) l_a が点 $(2, -5)$ を通るとき a の値を求めよ。
- (2) どのような実数 a を選んでも、 l_a は点 $(3, 10)$ を通らないことを示せ。
- (3) a がすべての実数を動くとき、 l_a が通る点 (x, y) の全体を S とおく。領域 S を図示せよ。

II. 実数 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、直線 $y=(2t-2)x-t^2-1$ の通過する領域を xy 平面に図示せよ。

5 [(1) 上智大 (2) 工学院大]

(1) 実数 t に対して $C: y=x^2-2tx+2t^2-2t-3$ は放物線を表す。 t が $t \geq 1$ で動くとき、 C が通過する範囲を求め、それを図示せよ。

(2) m が実数全体を動くとき、 xy 平面において $(x-2m)^2+(y+m)^2=m^2$ の表す図形が通過する範囲を図示せよ。

6 [I. 2023 青山学院大 II. 2010 京都大 III. 2010 三重大]

I. 連立不等式
$$\begin{cases} 3x+2y \leq 18 \\ x+4y \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 の表す領域を D とする。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき、 $x+y$ の最大値を求めよ。
- (3) 点 (x, y) が領域 D を動くとき、 $2x+y$ の最大値を求めよ。
- (4) a を正の定数とする。点 (x, y) が領域 D を動くとき、 $ax+y$ の最大値を求めよ。

II. 座標平面上の点 $P(x, y)$ が $4x+y \leq 9$, $x+2y \geq 4$, $2x-3y \geq -6$ の範囲を動くとき、 $2x+y$, x^2+y^2 のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。

III. 連立不等式 $x+2y-8 \leq 0$, $2x-y+4 \geq 0$, $3x-4y+6 \leq 0$ を満たす座標平面上の点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 領域 D における $x+y$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。
- (3) 領域 D における x^2+y の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。

高2数学 基本問題演習 28. 軌跡と領域(2)

7 [2022 学習院大]

連立不等式 $2x - y \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 5$ が表す領域を D とする。

(1) 点 $P(x, y)$ が D 内を動くとき、 $2x + y$ の最大値と、最大値を与える点の座標を求めよ。

(2) 次の条件を満たす実数 a の範囲を求めよ。

条件：点 $P(x, y)$ が D 内を動くとき、点 $A(1, 2)$ において $ax + y$ が最大値をとる。

8 [2016 立教大]

食品 X, Y がある。食品 X は 100 g あたり 80 円で、栄養素 a を 4 mg, 栄養素 b を 20 mg 含む。食品 Y は 100 g あたり 60 円で、栄養素 a を 2 mg, 栄養素 b を 60 mg 含む。栄養素 a を 8 mg 以上、栄養素 b を 80 mg 以上になるように食品 X, Y を混合するとき、費用を最小にするには、食品 X を $^{\text{ア}}$ g と食品 Y を $^{\text{イ}}$ g 混ぜればよい。