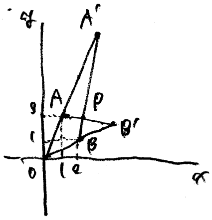
基本問題演習37. 平面ベクトル(3)

[1]

I. 直線AB'と直線A'Bの交点をPとする



メネラウスの定理より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A'P}{PB}=1$$

$$\therefore \frac{A'P}{PB}=4$$

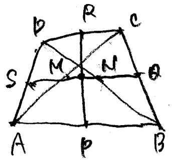
よって

$$\vec{OP}=\frac{1}{5}\vec{OA'}+\frac{4}{5}\vec{OB}$$

$$=\frac{3}{5}\vec{OA}+\frac{4}{5}\vec{OB}$$

$$=\frac{3}{5}\binom{1}{3}+\frac{4}{5}\binom{2}{1}=\begin{pmatrix}\frac{11}{5}\\ \frac{13}{5}\end{pmatrix} \quad \therefore P\left(\frac{11}{5},\frac{13}{5}\right)$$

II. (1) Aを原点としB($\vec{b}$), C($\vec{c}$), D($\vec{d}$)とする



$$\vec{AK}=\frac{1}{2}\vec{AP}+\frac{1}{2}\vec{AR}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{b}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$$

$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$$\vec{AL}=\frac{1}{2}\vec{AQ}+\frac{1}{2}\vec{AS}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\vec{d}$$

$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

よりKとLは一致する

(2) $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{AN}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$

たして1

$\vec{AK}=\frac{1}{2}(\vec{AM}+\vec{AN})$ より $\left(\vec{AK}=\frac{1}{2}\vec{AM}+\frac{1}{2}\vec{AN}\right)$

Kは直線MN上にある。(共線条件)

<point>

Y. イと逆ベクトル

[2]

I. 直線上の点をP($\vec{p}$)とすると

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ (t:実数)

P(x, y)とすると

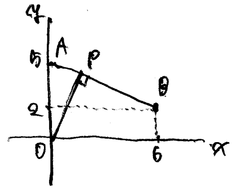
$$\binom{x}{y}=\binom{0}{2}+t\binom{1}{2}$$

$$\therefore \begin{cases}x=t\\ y=2t+2\end{cases}$$

tを消去して

$y=2x+2$

II. $\vec{OP}=(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}$



$=\vec{OA}+t(\vec{OB}-\vec{OA})$

$=\vec{OA}+t\vec{AB}$

$\vec{OP}\perp\vec{AB}$のとき$|\vec{OP}|$は最小

このとき$\vec{OP}\cdot\vec{AB}=0$より

$\vec{OA}=\binom{0}{5}$, $\vec{AB}=\binom{6}{-3}$

$\vec{OP}\cdot\vec{AB}=(\vec{OA}+t\vec{AB})\cdot\vec{AB}$

$=\vec{OA}\cdot\vec{AB}+t|\vec{AB}|^2$

$=-15+45t=0$ ∴ $t=$ ア $\boxed{\frac{1}{3}}$

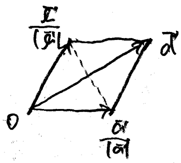
このとき

$\vec{OP}=\binom{2}{4}$ ∴ $|\vec{OP}|=$ イ $\boxed{2\sqrt{5}}$

tが$0\leqq t\leqq 1$を動くとき

Pは線分AB上を動くから ウ $\boxed{3\sqrt{5}}$

III. (1) $\vec{d}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とおくと



$\vec{d}$は$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$と$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$がとなり合う

2辺とするひし形の対角線となる

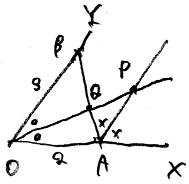
ひし形の対角線は内角を二等分するから

$\vec{d}$は∠XOYを二等分する

よって$\vec{c}=t\vec{d}$も∠XOYを二等分するので

題意は示された

(2) (1)より



$\vec{p}=t\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{3}\right)$ (t:実数)

また

$\vec{p}=\vec{a}+\vec{AP}$

$\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

$=\vec{a}+s\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{AB}}{4}\right)$ (s:実数)

$=\left(1+\frac{s}{4}\right)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}$ は1次独立より

$$\begin{cases} \dfrac{t}{2} = 1 + \dfrac{s}{4} \\ \dfrac{t}{3} = \dfrac{s}{4} \end{cases} \qquad \therefore t = 6,\ s = 8$$

よって

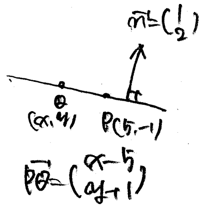
$$\vec{p} = 6\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right) = 3\vec{a} + 2\vec{b} \ /\!/ \quad (\text{Pは傍心})$$

<point>

1. 直線のベクトル方程式(方向ベクトル利用)

$\boxed{3}$

直線上の点を $Q(x, y)$ とすると



$\vec{PQ} \cdot \vec{m} = 0$

$1 \cdot (x-5) + 2(y+1) = 0$

$\therefore x + 2y - 3 = 0 \ /\!/$

$x - 3y - 2 = 0$ の法線ベクトルは

$\vec{n}$ は $\vec{n} = \binom{1}{-3}$

2直線のなす角 θ は法線ベクトルのなす角に等しいから

$$\cos\theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \theta = 135^\circ$

$\alpha = 180^\circ - \theta = 45^\circ \ /\!/$

<point>

1. 直線のベクトル方程式(法線ベクトル利用)

$\boxed{4}$

I. 1) $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$ より

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 25$

$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 25$

$9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 36 = 25$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \ /\!/$

2) $|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 36 + 40 + 36 = 112$

$\therefore |2\vec{a} + \vec{b}| = 4\sqrt{7}$ より

$|\vec{p} - (\vec{a} - \vec{b})| = 4\sqrt{7}$ であるから

中心 $(\vec{a} - \vec{b})$, 半径 $4\sqrt{7} \ /\!/$

3) $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (2\vec{p} - \vec{b}) = 0$ より

$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \left(\vec{p} - \dfrac{\vec{b}}{2}\right) = 0$

$A(\vec{a}), C\left(\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$ とおくと

$\vec{AP} \cdot \vec{CP} = 0 \quad (\vec{PA} \cdot \vec{PC} = 0)$

より, Pは A, C を直径の両端とする円を描く

中心は $\left(\dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{4}\right)$, 半径は $\dfrac{\left|\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right|}{2} = \dfrac{|2\vec{a} - \vec{b}|}{4} = \sqrt{2}$

[別解]

$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (2\vec{p} - \vec{b}) = 0$ より

$2|\vec{p}|^2 - (2\vec{a} + \vec{b})\vec{p} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$|\vec{p}|^2 - \left(\vec{a} + \dfrac{\vec{b}}{2}\right)\vec{p} + \dfrac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\left|\vec{p} - \dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{4}\right|^2 - \dfrac{|2\vec{a} + \vec{b}|^2}{16} + \dfrac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\left|\vec{p} - \dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{4}\right|^2 = \dfrac{|2\vec{a} - \vec{b}|^2}{16}$

$\therefore \left|\vec{p} - \dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{4}\right| = \dfrac{|2\vec{a} - \vec{b}|}{4}$

II. $|\vec{AP}| = 2|\vec{BP}|$ より (アポロニウスの円)

$|\vec{AP}|^2 = 4|\vec{BP}|^2$

$|\vec{p} - \vec{a}|^2 = 4|\vec{p} - \vec{b}|^2$

$|\vec{p}|^2 - 2\vec{a}\vec{p} + |\vec{a}|^2 = 4(|\vec{p}|^2 - 2\vec{b}\vec{p} + |\vec{b}|^2)$

$3|\vec{p}|^2 - 2(4\vec{b} - \vec{a})\vec{p} + 4|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$

$|\vec{p}|^2 - 2 \cdot \dfrac{4\vec{b} - \vec{a}}{3}\vec{p} + \dfrac{4|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2}{3} = 0 \qquad |\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 16|\vec{b}|^2$

$\left|\vec{p} - \dfrac{4\vec{b} - \vec{a}}{3}\right|^2 - \dfrac{|4\vec{b} - \vec{a}|^2}{9} + \dfrac{4|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2}{3} = 0$

$\left|\vec{p} - \dfrac{-\vec{a} + 4\vec{b}}{3}\right|^2 = \dfrac{4|\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}{9}$

$\left|\vec{p} - \dfrac{-\vec{a} + 4\vec{b}}{3}\right|^2 = \left|\dfrac{2\vec{a} - 2\vec{b}}{3}\right|^2 \ /\!/$

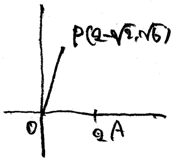
<point>

1. 円のベクトル方程式

5

(1) $\vec{OP}=\binom{2}{0}+\sqrt{2}\binom{-1}{\sqrt{3}}=\binom{2-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

∴ P $\boxed{(2-\sqrt{2},\ \sqrt{6})}$ ア

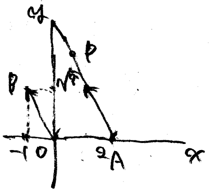


$\tan\angle AOP=\frac{\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{2})}{2}}$ イ

(2) $\vec{OP}=\vec{OA}+t\vec{OB}$

図より Pは

$\boxed{y=-\sqrt{3}x}$ の $y>0$ の部分にある。

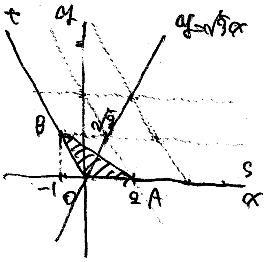


(3) [1] ③. ⑨

[2] ⑧. ⑨

[3] $t=s$ すなわち

$s-t=0$ ②

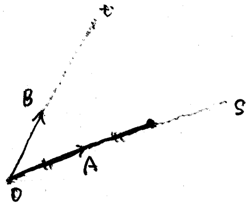


<point>

1. 斜交座標

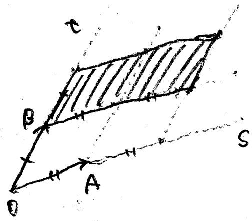
6

I (1)



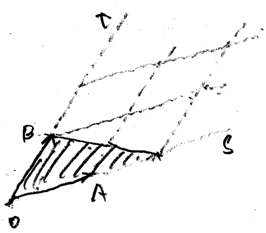
図の太線部

(2)



図の斜線部
(境界含む)

(3)



$s+2t\leqq 2$
∴ $t\leqq -\frac{1}{2}s+1$

図の斜線部
(境界含む)

7

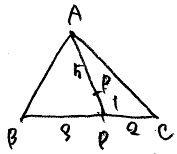
(1) $\vec{PA}+2\vec{PB}+3\vec{PC}=\vec{0}$

$-\vec{AP}+2(\vec{AB}-\vec{AP})+3(\vec{AC}-\vec{AP})=\vec{0}$

$6\vec{AP}=2\vec{AB}+3\vec{AC}$

∴ $\vec{AP}=\frac{2}{6}\vec{AB}+\frac{3}{6}\vec{AC}$

$=\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\vec{AB}+\frac{3}{5}\vec{AC}\right)$



$\vec{AD}=\frac{2}{5}\vec{AB}+\frac{3}{5}\vec{AC}$ とおくと

$=\frac{5}{6}\vec{AD}$

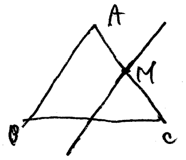
よってPはBCを3:2に内分する点をDとして

ADを5:1に内分する点である。

(2) $\vec{PA}+2\vec{PB}+3\vec{PC}=k\vec{AB}$

$6\vec{AP}=2\vec{AB}+3\vec{AC}-k\vec{AB}$

∴ $\vec{AP}=\frac{1}{2}\vec{AC}+\frac{2-k}{6}\vec{AB}$



よってPはACの中点Mを通り

ABに平行な直線上を動く。

(3) Pが△ABCの内部にあるとき

$\frac{2-k}{6}\geqq 0,\ \frac{1}{2}+\frac{2-k}{6}\leqq 1$

$k\leqq 2,\quad k\geqq -1$

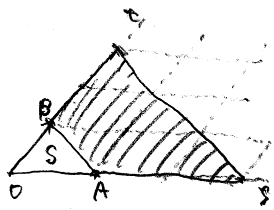
∴ $-1\leqq k\leqq 2$

II.

(1) $1\leqq s+t\leqq 3$

∴ $\begin{cases} t\geqq -s+1 \\ t\leqq -s+3 \end{cases}$

3倍



(2) $1\leqq s+2t\leqq 3$

∴ $\begin{cases} t\geqq -\frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ t\leqq -\frac{1}{2}s+\frac{3}{2} \end{cases}$

4倍